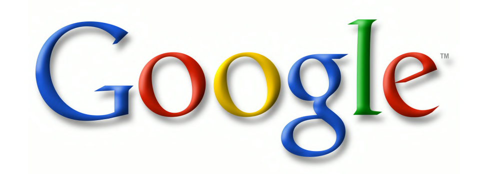


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

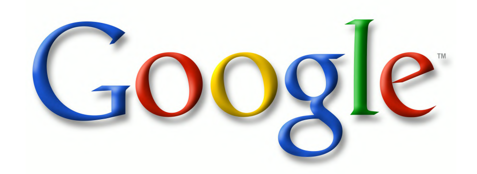
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

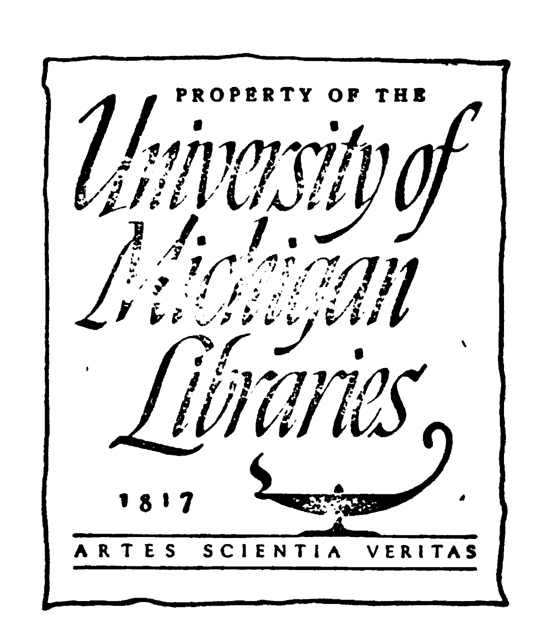
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

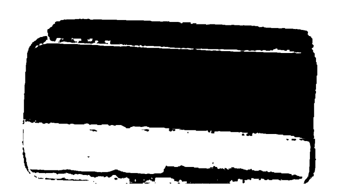
+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 448970


PROPERTY OF THE
University of
Michigan
Libraries
1817
ARTES SCIENTIA VERITAS



QA
273
.O29

405

Die

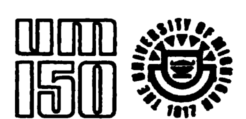
Wahrscheinlichkeits-Rechnung

von

Dr. L. Oettinger,

Grofsherzoglich-Badischem Hofrathe und ordentl. öffentl. Professor der Mathematik
an der Universität zu Freiburg im Br.

UNIVERSITY LIBRARY



CAUTION --- Please handle this volume with care.
The paper is very brittle.

485

Die

Wahrscheinlichkeits-Rechnung

von

Dr. L. Oettinger,
Grofsherzoglich-Badischem Hofrathe und ordentl. öffentl. Professor der Mathematik
an der Universität zu Freiburg im Br.

Berlin, 1852.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Lib. Com.
Maglione
2-25-28
16615

Vorwort.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung umfafst ein sehr ausgebreitetes und wichtiges Gebiet und hat es mit der Anwendung der Gesetze, welche die Mathematik entwickelt, auf einzelne Zweige des menschlichen Wissens zu thun. Sie gehört daher eigentlich in das Gebiet der angewandten Mathematik, und ihre Aufgabe wird um so besser gelöset und ihr Umfang erweitert werden können, je mehr Mittel die Mathematik auffindet und der Anwendung zur Verfügung stellt.

Die ersten Anfänge dieser Wissenschaft reichen bis auf *Pascal* und *Fermat* zurück, welche sich mit der Lösung einzelner, ihr angehöriger Probleme (§. 24. S. 107) beschäftigten und sie, wie dies bei dem ersten Hervortreten solcher Fragen gewöhnlich ist, in sehr specieller Form aufstellten. Verschiedene Mathematiker wendeten später diesem eben so wichtigen als anziehenden Zweige der Mathematik ihre Aufmerksamkeit zu und es erwuchs hieraus eine besondere Wissenschaft. So *Huyghens* in seiner Abhandlung „De ratiociniis in ludo aleae" und *Jac. Bernoulli*, der in seiner Schrift „Ars conjectandi" die Grundzüge dieser Doctrin feststellte. Hieran reiheten sich nun die Arbeiten der *Bernoulli*, und dann die Schriften von *Montmort* „Essai sur les jeux de hazard" und von *Moivre* „Doctrine of Chances"; ferner die Abhandlungen von *Euler*, *Lagrange* u. A. über diesen Gegenstand. In der neuern Zeit wurde die Literatur dieses Zweiges der Mathematik durch die ausführlicheren Werke von *Condorcet* „Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix", von *Laplace* „Théorie analytique des probabilités" und von *Poisson* „Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile" bereichert: so dafs dieselbe nun eine früher nicht gekannte Bedeutung gewann.

Math 7-40

Zufolge der Titel der genannten Werke beschäftigen sich dieselben scheinbar mit ganz verschiedenen Dingen. Die Aufgabe, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösen hat, ist nicht wie bei andern Theilen der Mathematik aus einem obersten Grundsatze organisch zu erzeugen und abzuleiten, sondern sie nimmt ihren Inhalt, wie alle mit der Anwendung sich beschäftigenden Doctrinen, aus dem Gesammtgebiete des menschlichen Wissens zusammen; überall wo sie tauglichen Stoff zur Bildung und Anwendung findet. Der von ihr zu verarbeitende Stoff steht durchaus nicht im Zusammenhange; sie hat ihn sogar nicht in Zusammenhang zu bringen, sondern nur neben einander zu stellen und dann bei dem Eingehen in das Einzelne nach einer bestimmten Richtung hin systematisch ihn zu ordnen. Sogar die allgemeinen Grundsätze, welche sie als maafsgebend aufstellt, fliefsen nicht einmal aus einem obersten Princip und sind nicht dem von ihr zu verfolgenden Zwecke entnommen. Das Gebäude, welches sie aufführt, ist nicht aus einerlei Stoff, sondern nur aus der Gleichförmigkeit der Behandlungsweise erwachsen.

Die Wahrscheinsichkeitsrechnung beschäftigt sich nach ihrem gegenwärtigen Stande mit Folgendem: Mit Darstellung der allgemeinen Grundsätze, welche bei der Behandlung ihrer einzelnen Zweige gelten; mit Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten des einmaligen oder wiederholten Eintreffens von Ereignissen, wenn die dasselbe bedingenden Ursachen bekannt sind; mit Ermittlung des Werths von Gütern, welche von dem möglichen Eintreffen künftiger Ereignisse abhangen und des Werths der Erwartung oder der ob- und subjectiven Hoffnung; mit Betrachtung der Zufälligkeiten bei den Spielen und Lotterieen; mit Berechnung der Lotterie-Anlehen; mit Bestimmung der Verhältnisse der Sterblichkeit und der menschlichen Lebensdauer, für einzelne Personen, so wie für das Zusammenleben mehrerer Personen und der darauf sich gründenden Werthbestimmung mancher Art von Gütern, wie Leibrenten, Lebensversicherungen u. s. w., so wie mit den darauf gegründeten Versicherungs- und Rentengesellschaften, Tontinen, Annuitäten, Wittwen- und Waisen-Pensions- und Versorgungs-Anstalten u. s. w.; mit Ermittlung der Glaubwürdigkeit der Zeugen-Aussagen, der Zuverlässigkeit der Urtheile in politischer und juridischer Beziehung, die von

einem Vereine mehrerer Personen gefällt werden; mit Bestimmung der Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen, Erschliefsung der Ursachen aus den durch dieselben hervorgebrachten Erscheinungen und des Übergangs von ihnen auf das Eintreffen künftiger Ereignisse; mit Ermittlung der Gröfse und Bedeutung der Fehler bei Beobachtungen und der hiernach nöthigen Verbesserungen u. s. w.

Laplace hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung in seinem oben angeführten Werke in 11 Abschnitten am vollständigsten behandelt. Indessen sind einzelne Zweige derselben ziemlich wenig bedacht. Z. B. das 8te Capitel. Anderes, wie die Spiele, Lotterieen, Lotterie-Anlehen, sind übergangen; wieder Anderes verdankt seine Berücksichtigung nur Zufälligkeiten; wie die im 3ten Capitel behandelte Aufgabe (Des lois de la probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événements), die eigentlich dem zweiten Capitel angehört. Die weiter oben genannten Werke enthalten die Bearbeitung einzelner Zweige der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit der Feststellung der allgemeinen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1ter Abschnitt §. 1 — 3.); mit Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten bei Ereignissen, deren Ursachen bekannt sind (2ter und 3ter Abschnitt §. 4 — 34.); und zwar im 2ten Abschnitte (§. 4 — 24.), wenn das Eintreffen des fraglichen Ereignisses als ein einfaches zu betrachten ist, oder wenn es nur einmal eintritt; im 3ten Abschnitte (§. 25 — 34.), wenn dasselbe wiederholt, oder in einer bestimmten Reihenfolge eintreffen soll; und endlich im 4ten Abschnitte (§. 35 — 48.) mit Bestimmung des Werths der Erwartung oder der ob- und subjectiven Hoffnung.

Man sieht, dafs dies der kleinere Theil der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Der übrige Theil soll nachfolgen, sobald mir Mufse zu der weitern Bearbeitung wird.

Über den Inhalt der einzelnen Abschnitte ist Folgendes zu bemerken.

Die Aufstellung der allgemeinen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (§. 1 — 3.) weicht von derjenigen ab, die in den hieher gehörigen Schriften, namentlich von *Laplace*, gegeben wird. Es sind darunter nach meinem Dafürhalten nur diejenigen Sätze aufzunehmen, die sich als allgemein

characterisiren, dagegen alle die auszuschliefsen, welche nur für die einzelnen Theile dieser Wissenschaft als maafsgebend sich geltend machen. Die Gründe, welche diese Ansicht rechtfertigen sollen, sind mit Rücksichtnahme auf die von *Laplace* aufgestellten allgemeinen Grundsätze in §. 3. entwickelt; worauf ich also verweise. Auf das Werk von *Poisson*, welches theils die von *Laplace* aufgestellten Grundsätze annimmt, theils andere hinzufügt, denen gleichfalls jene Eigenschaft abgeht, besonders zurückzukommen, schien deshalb nicht nöthig.

Der *zweite und dritte Abschnitt* umfafst ein ziemlich weites Feld, welches sich mit dem Fortschreiten der Wissenschaft noch mehr erweitern wird. Es sind nicht nur diejenigen Probleme aufgenommen, welche von *Pascal, Jac.* und *Nic. Bernoulli, Euler, Lagrange, Trembley* u. A. aufgestellt und behandelt wurden, die auch *Laplace* in sein Werk (2tes und 3tes Cap.) aufnahm und denen er noch andere hinzufügte, sondern ihre Zahl ist auch noch durch neue vermehrt; wie sich aus einer einfachen Vergleichung der beigefügten geschichtlichen Notizen ergiebt. Dabei sind die meisten früher schon aufgestellten Probleme auf einen allgemeineren Standpunct zurückgeführt und von ihm aus beantwortet worden. Zahlen werden am einfachsten diese Behauptung rechtfertigen. Es ist der Inhalt der §§. 4, 8, 11, 13—18, 20, 22—24, 39, 30 und 33 mit dem Werke von *Laplace* zu vergleichen; ferner ist der Inhalt der §§. 4, 6, 7, 9, 10, 11 und gröfstentheils derer 15—18, 19, 21, 25—28, 31, 32 und 34 nachzusehen; wo nicht blofs einzelne, sondern eine Reihe von Problemen behandelt sind, die bei *Laplace* nicht vorkommen.

Ein ähnliches Verhältnifs ergiebt sich aus der Vergleichung des vierten Abschnitts mit dem X. Cap. des *Laplace*schen Werkes, wo dieser Gegenstand ziemlich karg bedacht ist.

Bei der Entwicklung der Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung war es ein Hauptzweck, sie so viel nur möglich auf ganz elementarem Wege zu geben. Hiedurch dürfte jeder Wissenschaft am meisten gedient sein; denn so wird verhütet, dafs sich die Methodik zu sehr erhebe und an die Stelle der Wissenschaftlichkeit setze. Die *Methode* kann immer nur formelle Dienste leisten und nur in so weit Berücksichtigung verdienen, als sie am schnellsten

fördert. Namentlich läfst die Wahrscheinlichkeitsrechnung sich nicht aus einer bestimmten Methode oder Form entwickeln. Es widerspricht dies ihrer Natur. Man hat indessen bei ihr dieses Mittel angewendet. *Lagrange* und *Trembley* haben mehrere der im 2ten und 3ten Abschnitte entwickelten Sätze durch die Methode der zurücklaufenden Reihen gelöset; *Laplace* hat sie auf die von ihm benannten „Fonctions génératrices" und beinahe mit gänzlicher Umgehung der Combinationslehre, gewifs nicht zum Frommen dieses Theils der Wahrscheinlichkeitsrechnung, zurückgeführt; denn dadurch, dafs man die Begründung ihrer Sätze in die weniger betretenen Pfade des höhern Calculs verwies und diesem wie mit einem Zauberstabe neue Gesetze entlockte, entrückte man sie ihrer natürlichen Bildsamkeit und entzog die in den 2ten und 3ten Abschnitt gehörigen Probleme ihrem natürlichen und heimischen Boden, der Combinationslehre. Schon *Euler* hat die von ihm gelöseten Probleme auf die Combinationen zurückgebracht, und *Trembley* hat Dasselbe bei einigen andern (§. 33. und 34.) in Comment. Soc. reg. scient. Gotting. ad ann. 1793 et 1794 gethan.

Der 2te und 3te Abschnitt macht es sich zur Haupt-Aufgabe, diese Ansicht durchzuführen und zu zeigen, dafs man mit Unrecht die Combinationslehre von diesem Felde ausschlofs; denn man wird, wenn man anders nicht mit vorgefafster Meinung die hier vorgetragenen Untersuchungen betrachtet, aus einer Vergleichung des hier Gegebenen mit dem früher Gewonnenen die Überzeugung entnehmen, dafs die Combinationslehre nicht nur allgemeinere Methoden und Entwicklungen an die Hand giebt, als die bisher eingeschlagenen Verfahren, sondern dafs sie überhaupt eine gröfsere Anzahl von Problemen lösen lehrt; wegen ihrer ungemeinen Bildsamkeit und reichhaltigen Anwendungsfähigkeit.

Aus diesem Grunde ist auch noch auf den weitern Zweck des Vorliegenden aufmerksam zu machen. Er besteht darin, durch die im 2ten und 3ten Abschnitt angestellten Untersuchungen zugleich der *Combinationslehre* zu dienen. Jedes hiehergehörige Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung löset auch ein Problem der Combinationslehre auf; denn beide Disciplinen stehen in Wechselwirkung. Dies wurde entweder bei der Aufstellung der einzelnen Aufgaben schon zum Voraus angekündigt, oder, wo es nicht der Fall war, wurde

gehörigen Orts bemerkt, welches Problem der Combinationslehre zur Frage komme, und wo ihm seine Stelle anzuweisen sei. Man kann daher den 2ten und 3ten Abschnitt zugleich als eine Erweiterung der Combinationslehre betrachten; wie es die gefundenen Sätze nachweisen.

Der *vierte Abschnitt* handelt von der Ermittlung des *Werths der Erwartung* oder der *ob*- und *subjectiven Hoffnung*, von *Laplace* „Espérance morale" genannt. Zuerst sind Begriff und Bedeutung eines zu erwartenden Gutes und die daraus sich ergebenden mathematischen Bestimmungen festgestellt; dann ist der Einflufs angegeben, welchen die Ordnung auf die einzelnen Theilnehmer bei bestimmten Wahrscheinlichkeiten äufsert; hierauf das Verhältnifs der Einlage zu dem zu erwartenden Gewinn, u. s. w. Endlich sind, nach dem Vorgange von *Dan. Bernoulli*, die Gesetze der subjectiven Hoffnung entwickelt.

Schliefslich ist zu bemerken, dafs diese Arbeit schon im Jahre 1842 niedergeschrieben war.

Freiburg i. B. im Februar 1848.

L. Oettinger.

Inhalt.

§. 6. Beweis des Satzes: Werden aus einer Urne, welche beliebig viele Kugel-Arten enthält, mehrere Ziehungen gemacht, bei denselben $p_1, p_2, \ldots. p_r$ Kugeln herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in verschiedene Abtheilungen gebracht, und wird dann verlangt, dafs in einer oder mehreren Abtheilungen Kugeln von einer bestimmten Art, oder von bestimmten Verhältnissen aus verschiedenen Arten enthalten sein sollen, so ist die Ordnung, nach welcher die Kugeln in die verschiedenen Abtheilungen gebracht werden, oder die Ordnung unter den verschiedenen Abtheilungen, gleichgültig, und es kann Jemand, der p_1 Kugeln von beliebiger Mischung aus einer Abtheilung zu entnehmen wünscht, dazu jede beliebige Abtheilung wählen, wenn sie nur die gehörige Zahl von Kugeln enthält.

Bestimmung der sich daran knüpfenden Wahrscheinlichkeiten für specielle Fälle.

§. 7. Beweis des Satzes, dafs die im vorigen Paragraph gefundenen Gesetze gelten, wenn die Kugeln *einzeln* oder *in Masse* aus der Urne genommen und in Abtheilungen gebracht werden.

§. 8. In einer Urne sind m weifse und n schwarze Kugeln enthalten. Es wird p mal gezogen und eine Kugel herausgenommen. So oft eine schwarze Kugel erscheint, wird sie zurückgelegt; so oft eine weifse erscheint, wird sie durch eine schwarze ersetzt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach p Ziehungen r weifse Kugeln erschienen, also noch $m-r$ weifse Kugeln in der Urne zurückgeblieben sind?

§. 9. Die Bedingungen sind wie in (§. 8). So oft eine weifse oder eine schwarze Kugel erscheint, wird sie zurück und eine schwarze mit ihr in die Urne gelegt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen r weifse Kugeln erscheinen werden?

§. 10. In einer Urne sind n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus.

a) Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel gerade in derjenigen Ziehung erscheinen wird, welche durch die ihr aufgeschriebene Zahl angezeigt ist?

b) Wie grofs ist sie, dafs gerade r Kugeln mit den ihnen aufgeschriebenen Zahlen in p Ziehungen zusammentreffen werden?

c) Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit ihnen zusammentreffen, wenn entweder nur p oder alle Kugeln gezogen werden?

d) Wie grofs ist sie, dafs wenigstens r und höchstens s Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden?

§. 11. In einer Urne sind m Arten von Kugeln enthalten, jede von gleichvielen Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnet sind. Es werden p Kugeln herausgenommen; dann sind die im vorigen Paragraph unter (*a*) bis (*d*) gestellten Fragen zu beantworten.

Berichtigung der Angaben von *Laplace* und *Euler* bei der Behandlung der Probleme dieses und des vorhergehenden Paragraphs, und Auflösung dreier Probleme über Stellen-Elemente in der Combinationslehre.

§. 12. In einer Urne sind m, in einer andern n Kugeln enthalten. Aus jeder wird eine willkürliche Zahl von Kugeln gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit:

a) Dafs aus jeder Urne gerade p Kugeln,

b) Überhaupt gleichviele Kugeln werden gezogen werden?

Von zwei Urnen enthält jede m, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnete Kugeln. Man zieht gleichzeitig p Kugeln aus jeder Urne. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit:

a) Dafs sie die gleichen Zahlen haben und

b) Dafs überhaupt gleichviele und mit den nämlichen Zahlen bezeichnete Kugeln erscheinen werden?

In einer Urne befinden sich m Kugeln. A nimmt irgend eine Zahl von Kugeln heraus und B ruft gleichzeitig irgend eine Zahl, die kleiner als $m+1$ ist, aus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs beide die gleiche Zahl treffen werden?

§. 13. In einer Urne sind m Kugeln. Man nimmt eine Zahl von Kugeln aufs Gerathewohl heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs die herausgenommene Kugel-Anzahl *gerade* und

b) Dafs sie *ungerade* sein werde?

m schwarze und n weifse Kugeln sind in einer Urne. Man nimmt eine gerade Zahl von Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs von jeder Farbe gleichviele und

b) Dafs von jeder gleichviele und gleichbezeichnete Kugeln erscheinen werden?

§. 14. In einer Urne befinden sich m, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnete Kugeln. Es wird p mal und jedesmal eine Kugel gezogen, die nach der Ziehung wieder hineingelegt wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs die Summe der auf den gezogenen Kugeln stehenden Zahlen gerade s beträgt?

b) Dafs die Summen der den Kugeln aufgeschriebenen Zahlen entweder s oder niedriger sind?

c) Dafs sie zwischen q und s liegen, also wenigstens q und höchstens s betragen?

§. 15. Die nämlichen Wahrscheinlichkeiten sollen bestimmt werden, wenn in einer Urne r Kugel-Arten enthalten, den Kugeln erster Art die Zahlen k_1+1, k_1+2, ... m_1; denen zweiter Art die Zahlen k_2+1, k_2+2, ... m_2 u. s. w. aufgeschrieben sind, und unter den gleichen Bedingungen gezogen wird.

§. 16. Wenn in einer Urne Kugeln enthalten sind, auf welchen die Zahlen 1, 2, 3, ... $2m-1$ stehen, und zwar so, dafs nur je eine von denen vorhanden ist, welche die Zahlen 1 und $2m-1$, je zwei von denen, welche die Zahlen 2 und $2m-2$, je drei von denen, welche die Zahlen 3 und $2m-3$ haben u. s. w., von denen, welche die Zahl m tragen, aber m.

S. 17. Und zwar so, dafs nur je eine von denen vorhanden ist, welche die Zahlen 1 und $2m-1$ haben, je drei $=\frac{2.3}{1.2}$ von denen, welche die Zahlen 2 und $2m-2$, je sechs $=\frac{3.4}{1.2}$ von denen, welche die Zahlen 3 und $2m-3$ haben u. s. w., $\frac{m(m+1)}{1.2}$ von denen mit der Zahl m.

§. 18. Anwendung der in (§. 14 bis 17.) gefundenen Gesetze auf den Fall, wenn die Elementenzahl unendlich grofs ist; so wie auf Fehlergrenzen bei Beobachtungen, auf den Lauf der Planeten u. s. w.

§. 19. Von r Urnen enthält jede m Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnet sind. Aus jeder Urne wird gleichzeitig eine Kugel gezogen und nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt. Es wird p mal gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs k bestimmte Kugeln und

b) Dafs k bestimmte Kugeln zugleich und darunter jede wenigstens einmal,

c) Dafs gerade q verschieden bezeichnete Kugeln,

d) Dafs wenigstens q verschieden bezeichnete,

e) Dafs höchstens q verschieden bezeichnete erscheinen werden?

§. 20. In einer Urne sind m verschieden bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt r Kugeln einzeln oder auf einmal heraus und legt sie zusammen nach der Ziehung

in die Urne zurück. Dies Verfahren wird p mal wiederholt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs die gezogenen Kugeln nur k bestimmt bezeichneten zugehören werden?
b) Dafs von k bestimmten Kugeln wenigstens r verschiedene ein oder mehreremal,
c) Dafs k bestimmte Kugeln, jede wenigstens einmal,
d) Dafs gerade q verschiedene Kugeln, nicht mehr nicht weniger,
e) Dafs wenigstens q verschiedene Kugeln erscheinen werden?

§. 21. In einer Urne befinden sich r_1 verschiedene, aber das gleiche Zeichen habende Kugeln, r_2 verschiedene, das gleiche, aber ein von dem ersten verschiedenes Zeichen tragende Kugeln u. s. w., r_m das gleiche, aber ein von den frühern verschiedenes Zeichen habende Kugeln. Man nimmt q Kugeln heraus und bemerkt ihr Zeichen; hierauf nimmt man p Kugeln einzeln heraus und thut das Gleiche. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in den p folgenden Ziehungen eine Kugel mit einem bestimmten Zeichen vor denen der übrigen erscheinen werde?

Anwendung dieses Satzes auf häufige Wiederholungen, und Ableitung des Satzes, dafs das Eintreffen von Erscheinungen, bei häufigen Wiederholungen oder Beobachtungen, in geradem Verhältnifs zu den, die Erscheinungen hervorbringenden Ursachen steht.

§. 22. In einer Urne befinden sich m verschiedene Kugel-Arten. r_1 Kugeln haben ein und dasselbe Zeichen, r_2 ein anderes, aber gleiches Zeichen u. s. w. Man zieht p Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs k Kugeln von einem bestimmten Zeichen r_g früher als die von einem bestimmten Zeichen r_k,
b) Dafs in der ersten Ziehung eine Kugel, die zur Art r_g gehört, in der zweiten eine, die zur Art r_k gehört, und dafs in den folgenden p Ziehungen k Kugeln von der ersten Art früher als von der zweiten Art erscheinen werden?

Beantwortung derselben Fragen, wenn die gezogenen Kugeln nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt werden.

Anwendung dieser Sätze auf Probleme der Combinationslehre.

§. 23. Besondere Fälle der in (§. 22.) gegebenen Probleme.

Jemand will ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$ und das Gegentheil durch die entgegengesetzte $\frac{m}{a}$ bestimmt ist, mehreremal herbeiführen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs es in p Versuchen gerade r mal,
b) Dafs es wenigstens r mal,
c) Dafs es höchstens $(r-1)$ mal eintreffen und
d) Dafs sein Eintreffen in die Grenzen $(q:t)$ eingeschlossen bleiben werde?

Problem von *Jac. Bernoulli.*

§. 24. Jemand wünscht ein Ereignifs mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$ r mal eher herbeizuführen, als B im Stande ist, ein Ereignifs mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{b}{n}$ s mal herbeizuführen, und umgekehrt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A, wie grofs für B?

A_1 wünscht Dasselbe gegen $n-1$ Gegner A_2, A_3, ... A_n durchzuführen. Das Gleiche wünscht A_2 gegen seine übrigen Gegner u. s. w. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, das Unternehmen durchzuführen, für jede einzelne Person?

Dritter Abschnitt.

§. 25. In einer Urne befinden sich r verschiedene Kugel-Arten, von jeder Art m verschiedene, aber auf gleiche Weise bezeichnet. p Kugeln werden herausgenommen und die gezogenen Kugeln werden nicht in die Urne zurückgelegt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs s Kugeln von einem bestimmten Zeichen hintereinander gerade $x$mal,

b) Dafs gerade x_1 Kugeln von einem bestimmten Zeichen, x_2 von einem andern u. s. w. erscheinen werden, und

c) Dafs das Ereignifs in einer bestimmten Ordnung eintreffen werde?

Die Bedingungen sind wie oben. Man nimmt s Kugeln heraus, ohne die Kugeln zurückzulegen, und setzt das Verfahren bis zu Ende fort. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs s Kugeln, mit einem bestimmten Zeichen, in einer der Ziehungsreihen erscheinen werden, ohne dafs eine oder mehrere Kugeln von einem andern Zeichen erschienen sind?

Anwendungen.

Von p Urnen enthält jede m verschiedene Kugeln, deren Bezeichnung in allen dieselbe ist. Man nimmt aus einer Urne eine Kugel. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs x_1 Kugeln mit einem Zeichen, x_2 mit einem zweiten, x_3 mit einem dritten u. s. w. erscheinen werden?

Auflösung eines Problems aus der Combinationslehre, und Anwendung auf das Zahlensystem.

§. 26. In einer Urne befinden sich m verschiedene Kugeln. p mal wird gezogen und die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs k bestimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung hintereinander wenigstens einmal,

b) Dafs alle auf die genannte Weise wenigstens einmal,

c) Dafs die unter (*a*) genannten wenigstens r mal,

d) Dafs sie wenigstens r und höchstens s mal erscheinen werden?

§. 27. In einer Urne sind n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthalten. m Kugeln, deren Zeichen in der Reihe der Zahlen folgen, werden besonders beachtet. Man zieht p Kugeln einzeln und legt jede Kugel in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs von den gesonderten m Kugeln wenigstens k in der Ordnung der Zahlen hintereinander,

b) Dafs sie wenigstens r und höchstens s mal hintereinander,

c) Dafs sie gerade einmal, nicht mehr, nicht weniger, hintereinander, und

d) Dafs sie höchstens s mal hintereinander erscheinen werden?

Auflösung derselben Probleme, wenn in einer Urne r Kugel-Arten von der genannten Beschaffenheit befindlich sind.

§. 28. Auflösung der Probleme des vorhergehenden Paragraphen, wenn die gezogenen Kugeln nicht in die Urne zurückgelegt werden.

§. 29. Die Bedingungen sind wie in (§. 27.). Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Dafs von diesen m gesonderten Kugeln irgend eine Kugel k mal hintereinander erscheinen,

b) Dafs dies wenigstens r und höchstens s mal geschehen werde?

Anwendungen und Auflösung eines Problems aus der Combinationslehre.

§. 30. Betrachtung eines besondern Falles von (§. 29.).

A trachtet, gegen B ein Ereignifs mit der Wahrscheinlichkeit a, r mal hintereinander in p Versuchen herbeizuführen. Die Wahrscheinlichkeit für B ist b. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A, seinen Zweck zu erreichen?

Verallgemeinerung dieses Problems für n Theilnehmer.

Auflösung von Problemen aus der Combinationslehre.

***

Vierter Abschnitt.

Berichtigungen.

S. 30 Z. 15 v. u. l. erschienen st. erscheinen
- 44 No. 10, 11 u. 12 l. $St[$ st. $S+[$
- 46 Z. 5 v. u. l. $2m+1$ st. $2mn$
- 50 - 4 v. u. l. 2^m-1 st. $2-1$
- 51 - 8 v. u. l. führt st. führen
- 60 - 1 v. o. l. §. 16. st. §. 13.
- 62 - 15 v. u. l. §. 17. st. §. 14.
- 107 - 4 v. u. l. wurde st. werden würde
- — - 13 v. u. l. *Montmort* st. *Nontmort*
- 177. In No. 8 ist überall in den eingeklammerten Ausdrücken zu lesen: $5^{5|-1}$ st. $S^{5|-1}$
- — Z. 5 v. o. $\frac{5^{5|-1}}{1^{2|1}}$ st. $\frac{5^{5|-1}}{1^{5|1}}$
- — - 5 v. o. $\frac{5^{5|-1}}{1^{5|1}} m^{5|-1}$ st. $\frac{S^{5|-1}}{1^{5|1}}$
- — - 10 v. u. befinden st. befindet
- 205 - 12 v. o. aG_1 st. αG_1

I.

§. 1.

Das Wort „wahrscheinlich" wird im gewöhnlichen Leben von solchen Dingen gebraucht, deren Thatbestand, er mag der Vergangenheit oder der Zukunft, der sinnlichen oder der geistigen Anschauung angehören, nicht als wahr oder gewiſs angesehen und deswegen für unbezweifelt gehalten wird, aber doch viele, oder gar die meisten Gründe für sich hat. Man stellt den Begriff des Wahrscheinlichen dem der Wahrheit, Wirklichkeit, Gewiſsheit u. s. w. (verschiedenen Modificationen einer und derselben Grundbedeutung) gegenüber, und dem des Unwahrscheinlichen zur Seite, und gebraucht letztern, wenn nur wenige Gründe für den Thatbestand einer Sache sprechen, ihre Möglichkeit aber nicht bezweifelt werden kann.

Der Schluſs auf den Thatbestand einer Sache, oder das Eintreffen eines Ereignisses, hängt, wie leicht zu sehen, von der Kenntniſs der einwirkenden Ursachen, Umstände und Bedingungen einerseits, und andrerseits von dem Grade der Bildung, Einsicht und Urtheilskraft der schlieſsenden Personen ab. Die äuſsere Bedingung für den Begriff des Wahrscheinlichen ist, daſs der Gegenstand selbst keinen Widerspruch in sich trage, noch in einem solchen mit irgend einer anerkannten Wahrheit stehe. Eine und dieselbe Sache kann demnach für verschiedene Personen und unter verschiedenen Umständen verschiedene Grade der Wahrscheinlichkeit haben. Sind nun alle Ursachen, welche für das Dasein eines Dinges oder Ereignisses sprechen, und eben so auch alle, welche dagegen sprechen, genau bekannt, so kann man auch alle begünstigenden und alle hindernden Umstände zählen, unter einander vergleichen, den Grad der Wahrscheinlichkeit genau bestimmen, und ihn daher durch den Calcul darstellen. Dies ist die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu dem Ende hat man den besondern Ausdruck „mathematische Wahrscheinlichkeit" eingeführt, und versteht darunter das

Verhältnifs derjenigen Umstände, Ursachen oder Fälle, wodurch der Thatbestand einer Sache oder das Eintreffen eines Ereignisses bedingt ist, zu der Gesammtzahl aller möglichen Umstände, Ursachen oder Fälle, die mit ihm in Beziehung stehen und auf eine günstige oder hindernde Art einwirken können.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit kann demnach alle Stufen, von der Grenze der Unmöglichkeit, bis zu der der Gewifsheit, durchlaufen. Sie wird um so gröfser sein, je gröfser die Anzahl der begünstigenden Ursachen oder Umstände im Verhältnifs zur Gesammtzahl ist: sie wird um so kleiner sein, je geringer die Zahl der günstigen und je gröfser die der hindernden oder ungünstigen Ursachen oder Umstände im Verhältnifs zur Zahl aller möglichen Ursachen oder Umstände ist, die auf das Eintreffen eines Ereignisses einwirken.

§. 2.

Die Bemerkungen des vorigen Paragraph rechtfertigen folgende Grundsätze.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit wird durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler die dem Thatbestande einer Sache oder dem Eintreffen eines Ereignisses günstigen Fälle, der Nenner *alle möglichen*, auf den Thatbestand oder zu dem Eintreffen in Beziehung stehenden Fälle zählt.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit durch w, die Zahl der günstigen Fälle durch p, die aller möglichen durch q, so ist

1. $w = \frac{p}{q}$.

Hieran schliefst sich unmittelbar Folgendes.

2. Die Wahrscheinlichkeit ist ein echter Bruch; denn der Zähler mufs immer kleiner als der Nenner sein.

3. Die Gewifsheit ist der Einheit gleich, oder

4. $g = \frac{q}{q} = 1$,

wenn g die Gewifsheit bezeichnet. Sie tritt nämlich ein, wenn alle auf den Thatbestand einer Sache oder auf das Eintreffen eines Ereignisses Bezug habenden Elemente als günstig einwirkend zu betrachten sind.

Der Wahrscheinlichkeit, welche für das Bestehen einer Sache oder das Eintreffen eines Ereignisses spricht, steht derjenigen, welche für das

Gegentheil spricht, entgegen. Man nennt sie deshalb auch „entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit." Sie begreift die Zahl aller ungünstigen Fälle in sich, ergänzt daher die günstigen Fälle zur Zahl aller möglichen, und bringt mit der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit (Nro. 1.) die Gewifsheit hervor.

Beide Begriffe schliefsen einander aus. Dies giebt

$$s, \quad u = 1 - w = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}.$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist demnach ebenfalls ein echter Bruch, dessen Zähler die Anzahl der ungünstigen, der Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ausdrückt.

Kommt die Wahrscheinlichkeit einer einzigen Begebenheit oder des Bestehens nur einer Sache in Frage, und wird diese für sich allein und nicht in Verbindung oder Beziehung zu einer andern betrachtet, so nennt man sie „einfache Wahrscheinlichkeit." Schliefst die Wahrscheinlichkeit aber das Zusammentreffen mehrerer Begebenheiten oder das Zusammenbestehen mehrerer Dinge in sich, so heifst sie „zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit."

Wir unterscheiden zwei besondere Fälle dieser Wahrscheinlichkeit.

a) Entweder begreift das Bestehen einer Sache oder das Eintreffen eines Ereignisses mehrere Fälle in sich, von denen jeder ein günstiges Moment für die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit abgiebt, die sich aber gegenseitig so ausschliefsen, dafs nur einer von den fraglichen Fällen eintreffen kann:

b) Oder es begreift mehrere Fälle in sich, die zusammenwirken und dabei so von einander abhängen, dafs kein einziger Fall unerfüllt bleiben darf, wenn nicht die vorliegende Frage in ihrem Wesen geändert werden soll.

Die unter *a.* bezeichnete Wahrscheinlichkeit soll „relative Wahrscheinlichkeit" heifsen; wie dieser Name auch vorkommt, ob er gleich nicht ganz passend scheint; die unter *b.* bezeichnete wollen wir „bedingte oder abhängige Wahrscheinlichkeit" nennen.

Der hier bezeichnete Unterschied tritt besonders deutlich bei der Anwendung auf besondere Fälle hervor.

Sind in einer Urne 8 weifse, 10 rothe und 12 schwarze Kugeln enthalten, und wird einmal gezogen, und fragt man: wie grofs ist die Wahr-

scheinlichkeit, dafs entweder eine weifse oder eine schwarze Kugel erscheinen werde? so ist klar, dafs die Beantwortung der Frage auf dem Eintreffen des einen oder des andern Falles beruht. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine weifse Kugel erscheinen werde, ist $\frac{8}{30}$, dafs eine schwarze erscheinen werde, $\frac{12}{30}$. Jeder von beiden Fällen begünstigt das Eintreffen des Ereignisses. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der eine oder der andere Fall eintreffen werde, ist demnach

$$w = \frac{8}{30} + \frac{12}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Sind die Bedingungen wie vorhin, wird zweimal gezogen und die gezogene Kugel nach der Ziehung zurückgeworfen, und fragt man: wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs zuerst eine weifse und dann eine schwarze Kugel erscheinen werde, so ist die hier in Frage stehende Wahrscheinlichkeit die bedingte oder abhängige; denn beide Fälle, das Erscheinen einer weifsen und einer schwarzen Kugel, müssen eintreten, wenn das Eintreffen des Ereignisses statthaben soll. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine weifse Kugel erscheinen werde, ist wie vorhin $\frac{8}{30}$, dafs eine schwarze erscheinen werde $\frac{12}{30}$, weil die in der ersten Ziehung gezogene Kugel in die Urne zurückgeworfen wird, ehe die zweite Ziehung geschieht. Da nun das Erscheinen der weifsen Kugel dem der schwarzen vorangehen mufs, so wird das Eintreffen des zweiten Ereignisses durch das des ersten bedingt sein, und also unter 30 möglichen Fällen nur 8 mal vorkommen. Das Eintreffen des Ereignisses ist von dem Zutreffen der beiden genannten abhängig, und die Wahrscheinlichkeit, das es geschehen werde, ist

$$w = \frac{8}{30} \cdot \frac{12}{30} = \frac{8}{75}.$$

Der unter *a.* und *b.* bezeichnete Unterschied tritt deutlich hervor und führt zu ganz verschiedenen Resultaten. Im ersten Fall tritt die Summe, im zweiten das Product der einfachen Wahrscheinlichkeiten hervor.

Zuweilen ist die Wahrscheinlichkeit in doppelter Beziehung zusammengesetzt; wie sich an folgendem Falle zeigen wird.

Die Bedingungen sind die obigen. Es wird zweimal aus der Urne gezogen und die gezogene Kugel wird nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine weifse und dafs eine schwarze Kugel erscheinen werde?

Hier können zwei günstige Fälle eintreten. Entweder erscheint zuerst eine weifse und dann eine schwarze, oder zuerst eine schwarze und dann eine weifse Kugel. Der erste Fall wurde eben erörtert. Die Wahr-

scheinlichkeit dafür ist

$$w_1 = \tfrac{8}{30} \cdot \tfrac{12}{30} = \tfrac{8}{75}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs zuerst eine schwarze und dann eine weifse Kugel erscheinen werde, setzt die umgekehrte Ordnung voraus und ist aus den vorhin angegebenen Gründen

$$w_2 = \tfrac{12}{30} \cdot \tfrac{8}{30} = \tfrac{8}{75}.$$

Beide Fälle sind dem Eintreffen des Ereignisses günstig, schliefsen sich aber gegenseitig aus. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$w = \tfrac{8}{30} \cdot \tfrac{12}{30} + \tfrac{12}{30} \cdot \tfrac{8}{30} = \tfrac{16}{75}.$$

In dem vorliegenden Falle tritt die bedingte und die relative Wahrscheinlichkeit zusammen ein. Es giebt, wie leicht ersichtlich ist, noch zusammengesetztere Fälle. Ihre Untersuchung wird den in *a.* und *b.* ausgedrückten Unterschied bestätigen. Zugleich ergiebt sich ein allgemeines Gesetz, welches gilt, wenn auch mehr als zwei Ereignisse in Frage kommen, und welches sich auf folgende Weise darstellt.

Werden die Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen verschiedener, sich ausschliefsender Ereignisse begünstigen, durch $\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \frac{p_3}{q}, \ldots . \frac{p_n}{q}$ ausgedrückt, so ist die hieraus sich ergebende relative Wahrscheinlichkeit

$$6. \quad w = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots . p_n}{q}.$$

Hierin kann $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots . p_n$ entweder kleiner, oder höchstens so grofs als q sein.

Werden die Wahrscheinlichkeiten, von denen das Eintreffen eines zusammengesetzten Ereignisses abhängt, $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots . \frac{p_n}{q^n}$ genannt, so ist die bedingte oder abhängige Wahrscheinlichkeit

$$7. \quad w = \frac{p_1}{q_1} . \frac{p_2}{q_2} . \frac{p_3}{q_3}, \ldots . \frac{p_n}{q_n}.$$

Es zeigt sich aus (6.), dafs die relative Wahrscheinlichkeit durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fälle, aus (7.), dafs die bedingte durch das Product derselben ausgedrückt wird. Sind die Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen der einzelnen Fälle bestimmen, einander gleich, so geht die relative Wahrscheinlichkeit in ein Product und die bedingte in eine Potenz über. Dies tritt bei Wiederholungen ein.

Erwägt man nun, dafs die Gleichung (6.), aus Gründen, welche die Elementar-Mathematik lehrt, immer das nämliche Resultat liefert, in welcher *Ordnung* auch die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zusammengezählt

werden, und dafs die Gleichung (7.) das nämliche Resultat liefert, in welcher *Ordnung* auch die einzelnen Factoren vervielfacht werden, und trägt diese Erwägung auf die Bedeutung der Gleichungen über, so ergiebt sich folgender Grundsatz:

8. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, in welchem mehrere Fälle in einer bestimmten Ordnung aufeinander folgen, bleibt unverändert, wenn auch die Ordnung in der Reihenfolge der einzelnen Fälle geändert, oder wenn an die Stelle einer bestimmten Reihenfolge eine andere bestimmte Reihenfolge unter den in Frage stehenden Fällen gesetzt wird. Demnach ist die Ordnung, in welcher die einzelnen Fälle eines zusammengesetzten Ereignisses aufeinander folgen, bei Bestimmung der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit ganz gleichgültig.

Die Gleichung (7.) läfst noch eine andere und folgende Betrachtungsart zu.

Es sind n Urnen vorhanden, von denen die erste q_1, die zweite q_2, die dritte q_3, u. s. w., die $n$te q_n Kugeln enthält. In der ersten Urne befinden sich p_1 Kugeln einer bestimmten Art, in der zweiten p_2 Kugeln einer zweiten, in der dritten p_3 Kugeln einer dritten Art, u. s. w., in der $n$ten p_n Kugeln einer $n$ten Art. Man zieht aus jeder Urne gleichzeitig eine Kugel. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus jeder Urne eine Kugel von der bezeichneten Art werde gezogen werden?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit findet sich, wenn man zuerst das gleichzeitige Erscheinen der Kugeln von den bestimmten Arten aus den beiden ersten Urnen miteinander in Verbindung bringt, mit diesem das Erscheinen einer der bestimmten Kugeln aus der dritten Urne u. s. f., und endlich bis zu dem Erscheinen einer Kugel der bestimmten Art aus der letzten Urne aufsteigt. Die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen der einzelnen Kugeln aus den einzelnen Urnen sind $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots \frac{p_n}{q_n}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{p_1}{q_1} . \frac{p_2}{q_2} . \frac{p_3}{q_3} . \frac{p_4}{q_4} \ldots \frac{p_n}{q_n} .$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit (7.) führt zu folgendem Satze.

9. Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit ist es gleichgültig, ob das Eintreffen der einzelnen Ereignisse gleichzeitig, oder in der Zeit nach einander geschieht.

Leicht läſst sich ferner nachweisen, daſs auch bei dem gleichzeitigen Eintreffen der einzelnen Ereignisse die Ordnung gleichgültig ist.

Betrachtet man endlich die Zahl der Fälle, welche das Eintreffen eines Ereignisses begünstigen, als die dieses Ereigniſs hervorrufende Ursache (wie sich dies durch die Sache selbst rechtfertigt), so giebt dies Gelegenheit, die Ursachen mit der durch sie bedingten Wahrscheinlichkeit zu vergleichen. Bezeichnen wir die Ursachen, welche das Eintreffen zweier Ereignisse bedingen, durch u_1, u_2 und die durch sie bedingten Wahrscheinlichkeiten durch w_1, w_2, so ergiebt sich

10. $$u_1 : u_1 = w_1 : w_2.$$

Die Wahrscheinlichkeiten, welche dem Eintreffen der Ereignisse zugehören, stehen zu einander in demselben Verhältnisse, wie die Ursachen, auf welchen das Eintreffen der Ereignisse beruht; und umgekehrt.

11. Die Ursachen, welche für das Eintreffen der Ereignisse sprechen, stehen in demselben Verhältnisse, wie das Eintreffen der durch sie herbeigeführten Erscheinungen, oder wie die letztern zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Der Satz (11.) ist der umgekehrte von (10.). Beide bezeichnen den Zusammenhang zwischen Ursache und Erscheinung, welchen zu kennen wichtig ist, da er den Weg zum Auffinden neuer Erkenntnisse zeigt.

§. 3.

Die in dem vorhergehenden Paragraph aufgestellten Sätze bilden nach unserer Ansicht die Grundgesetze, worauf die Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht, und die ganze Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit der Anwendung dieser Gesetze auf einzelne Fälle.

Die aufgestellten Gesetze sind sehr einfach; aber ihre Anwendung und die Behandlung der einzelnen Fälle findet oft viele Schwierigkeiten.

Das Gebäude der Wahrscheinlichkeit beruht, wie §. 2. zeigt, auf der Ermittlung der einfachen Wahrscheinlichkeit. Aus ihr wird die zusammengesetzte sofort abgeleitet. Gerade aber die Bestimmung der einfachen Wahrscheinlichkeit ist oft einer der schwierigsten Puncte und nimmt die Aufmerksamkeit in hohem Grade in Anspruch.

Ueber die Art und Weise, wie die Wahrscheinlichkeit des einzelnen Falles aufgefunden oder bestimmt werden kann, lassen sich, wie leicht zu sehen, keine Regeln oder Gesetze aufstellen. Unter allen Mitteln,

welche zur Auflösung eines Problems dienen können, ist das einfachste das beste; und es soll in den folgenden Untersuchungen hierauf besonders Rücksicht genommen und das Zurückgreifen auf künstliche oder entfernt liegende Mittel so viel als möglich vermieden werden; denn je einfacher die Entwicklungen sind, desto mehr dürften sie die Ausbildung einer Wissenschaft fördern.

Bei Bestimmung der einfachen Wahrscheinlichkeit ist nach 1. §. 2. das Verhältnifs zwischen der Zahl derjenigen Fälle, welche dem Eintreffen einer Begebenheit günstig sind, und der Zahl aller möglichen mit dem Eintreffen eines Ereignisses in Verbindung stehenden Fälle zu ermitteln. Dabei wird immer vorausgesetzt, dafs alle die einwirkenden Fälle *gleich* möglich sind. Sind sie nicht *gleich* möglich, so mufs der verschiedene Grad der Möglichkeit bestimmt werden; was oft sehr schwierig, oft aus mangelhafter Kenntnifs der Umstände unausführbar, in manchen Fällen aber unwichtig und undankbar ist. Deshalb wird im Folgenden hierauf in der Regel nicht Rücksicht genommen werden.

Was nun die im vorigen Paragraph aufgestellten Grundsätze betrifft, so dürften sie als die hervortreten, denen der Character der Allgemeinheit zukommt, und die daher geeignet sind, die Grundlage einer Wissenschaft zu bilden.

Laplace hat in seinem „*Essai philosophique sur les probabilités*", die er als Einleitung zur 3ten Auflage seiner „*Théorie analytique des probabilités*" vorausschickte, zehn Grundsätze aufgestellt, die er als Grundlage dieser Theorie betrachtet, die aber nicht alle mit den hier aufgestellten zusammenfallen und die nach unserer Ansicht nicht die erforderliche, eben bezeichnete Eigenschaft zu haben scheinen *).

---

*) Die von *Laplace* aufgestellten Grundsätze lauten wie folgt:

Ier Principe.

Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport du nombre des cas favorables, à celui de tous les cas possibles.

IIe Principe.

Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable.

IIIe Principe.

Si les évènemens sont indépendans les uns des autres; la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières.

Der erste von *Laplace* aufgestellte Grundsatz fällt mit dem in 1. §. 2. ausgesprochenen Satze zusammen.

Dem zweiten Grundsatze mangelt eine genaue Erörterung und Fixirung des Inhalts. Die Bemerkungen, welche den Satz eröffnen, sind Resultate gemachter Erfahrungen bei Bearbeitung der Wissenschaft, dienen als Winke zur Aufmerksamkeit, und gehören offenbar einem Grundsatze nicht an. Werden diese Bemerkungen entfernt, so schliefst sich der Inhalt des letzten Satzes so nahe an den des ersten Grundsatzes an, dafs noch

---

Généralement la probabilité qu'un évènement simple dans les mêmes circonstances, arrivera de suite, un nombre donné de fois, est égale à la probabilité de cet évènement simple, élevée à une puissance indiquée par ce nombre.

IVᵉ Principe.

Quand deux évènemens dependent l'un de l'autre, la probabilité de l'évènement composé est le produit de la probabilité du premier évènement, par la probabilité que cet évènement étant arrivé, l'autre arrivera.

Vᵉ Principe.

Si l'on calcule à priori, la probabilité de l'évènement arrivé, et la probabilité d'un évènement composée de celui ci et d'un autre, qu'on attend; la seconde probabilité divisée par la première, sera la probabilité de l'évènement attendu, tirée de l'évènement observé.

VIᵉ Principe.

Chacune des causes auxquelles un évènement observé peut être attribué, est indiquée avec d'autant plus de vraisemblance, qu'il est plus probable que cette cause étant supposée exister, l'évènement aura lieu; la probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes, est donc une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'évènement, résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes; si ces diverses causes considerées à priori, sont inégalement probables, il faut au lieu de la probabilité de l'évènement, resultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité, par celle de la cause elle même.

VIIᵉ Principe.

La probabilité d'un évènement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'évènement observé, par la probabilité que cette cause existant, l'évènement futur aura lieu.

VIIIᵉ Principe.

Lorsque l'avantage (espérance mathématique) dépend des plusieurs évènemens; on l'obtient, en prenant la somme des produits de la probabilité de chaque évènement, par le bien attaché à son arrivée.

IXᵉ Principe.

Dans une serie d'évènemens probables, dont les uns produisent un bien, et les autres une perte; on aura l'avantage, qui en resulte, en faisant une somme des produits de la probabilité de chaque évènement favorable, par le bien qu'il procure et en retranchant de cette somme, celle des produits de la probabilité de chaque évènement défavorable, par la perte qui y est attachée. Si la seconde somme l'emporte sur la première, le bénéfice devient perte, et l'espérance se change en crainte.

Xᵉ Principe.

La valeur relative d'une somme infiniment petite, est égale à sa valeur absolue, divisée par le bien total de la personne intéressée.

ein weiteres Criterium zur Unterscheidung angegeben sein sollte. Da aber eine Wiederholung nicht in der Absicht des Verfassers liegen konnte, so läfst sich der Inhalt des letzten Satzes, worin der Grundsatz ausgesprochen ist, nur mit dem in 6. §. 2. angegebenen zusammenstellen, wenn er anders Bedeutung haben soll. *Laplace* hat aber die Erörterungen und Unterscheidungen, auf welchen der in 6. §. 2. aufgestellte Grundsatz beruht, nicht gegeben, ob sie gleich nicht hätten umgangen werden sollen.

Unter Nr. III. und IV. hat *Laplace* zwei Grundsätze aufgestellt, die sich bei näherer Untersuchung offenbar als identisch zeigen, und deswegen auch in einen Grundsatz zusammenfallen müssen. Die bedingte Wahrscheinlichkeit characterisirt sich nämlich auf zwei verschiedene Arten. Entweder liegt der Zusammenhang, worin zwei oder mehrere Ereignisse zu einander stehen, in ihnen selbst, und tritt ganz deutlich schon in ihrer Ankündigung hervor: oder er liegt in unserer Denkweise und in der Art, wie wir die Ereignisse auf einander beziehen, während diese selbst von einander unabhängig zu sein scheinen. Im letzten Fall findet aber immer Zusammenhang statt, und mufs stattfinden, wenn nicht ein Widerspruch entstehen soll. Denn es wäre nicht wohl denkbar, dafs Ereignisse, die unabhängig von einander sind, durch Rechnung in einen Zusammenhang gebracht werden könnten.

Dies wird durch Folgendes deutlicher hervortreten. A hat eine Urne, in welcher n mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln, B eine, in welcher m mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnete Kugeln enthalten sind. Nun setzen wir folgende Fälle:

a. A zieht aus seiner Urne zuerst eine Kugel; dann B eine aus der seinigen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs A die mit 1 bezeichnete Kugel und B die mit derselben Zahl bezeichnete Kugel ziehen werde?

b. A und B ziehen gleichzeitig eine Kugel aus beiden Urnen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die beiden gezogenen Kugeln die Zahl 1 haben werden?

c. A und B ziehen je eine Kugel. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine von den zwei gezogenen Kugeln die Zahl 1 trage?

d. A zieht eine Kugel. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die Zahl 1 trage? B zieht eine. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die Zahl 1 trage?

In dem Falle *a.* ist der Zusammenhang, worin beide Ereignisse stehen, deutlich angekündigt. In *b.* ist dieser Zusammenhang durch die Betrachtungsweise eingeführt. Dasselbe gilt von *c.* In *d.* findet kein Zusammenhang statt. Beide Ereignisse sind unabhängig von einander, stehen vereinzelt, sind auch nicht durch unsere Denkweise in irgend einen Zusammenhang gebracht. Der Calcul kann also auch keinen hineinlegen. In *a.* und *b.* kommt die bedingte Wahrscheinlichkeit in Betrachtung, in *c.* die bedingte und relative.

Dafs nun *Laplace* den dritten Grundsatz dadurch verallgemeinert, dafs er sagt: „Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine einfache Begebenheit unter den nämlichen Verhältnissen mehreremal nach einander eintrete, ist gleich der Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses, erhoben in die Potenz, welche durch die Anzahl der Wiederholungen bestimmt wird," können wir nicht billigen; denn dieser Begriff ist enger als der ihm vorhergehende, und keinesweges allgemeiner: gerade so wie der Begriff von Potenz ein besonderer Fall des Begriffes von Product ist. Aus dem in 7. §. 2. aufgestellten Satze folgt von selbst, dafs die bedingte Wahrscheinlichkeit in eine Potenz übergeht, wenn das wiederholte Eintreffen eines und desselben Ereignisses in Frage steht.

Jeder von den übrigen Grundsätzen, die *Laplace* aufgestellt hat, der 5te, 6te, 7te, 8te, 9te und 10te gehören besonderen Zweigen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, und kommen nur dort zum Vorschein. Sie lassen sich alle aus dem Begriffe der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit ableiten und sind in der That nichts anderes, als die Anwendung der in §. 2. aufgestellten Sätze auf besondere Fälle; wie sich dies an dem gehörigen Orte deutlich zeigen wird. Sie betreffen z. B. die Erschliefsung der Ursachen aus den Wirkungen, des Eintreffens künftiger Ereignisse aus vorhergegangenen Erscheinungen, die Bestimmung des Werthes der Hoffnung, des eines zu erwartenden Gutes u. s. w. und tragen deshalb unverkennbar den Character der Specialität an sich. Dies ist der Grund, warum sie hier nicht als allgemeine Grundsätze aufgeführt sind.

Der 10te Grundsatz ist ein Satz, welcher der Lehre von dem Werthe der subjectiven Hoffnung angehört und von *Dan. Bernoulli* (*Specimen theoriae novae de mensura sortis in Comment. Academ. scientiarum imperialis Petrop. Tom. V. ad annos 1730 et 1731. pag. 175.*) zuerst aufgestellt wurde.

Poisson ist in seinem Werke „*Recherches sur la probabilité des jugemens en matière criminelle et en matière civile, precédées des règles générales du calcul des probabilités.*" im Wesentlichen den von *Laplace* aufgestellten Grundsätzen gefolgt und hat sie noch um viele vermehrt, oder das Nähere erörtert. Da sie aber nach der hier vorgetragenen Ansicht die oben gemachten Bemerkungen nicht zu entkräften scheinen, so konnte auch hierauf keine Rücksicht genommen werden.

II.

§. 4.

In einer Urne sind verschiedenartige Kugeln enthalten: m_1 Kugeln der ersten, m_2 der zweiten u. s. w., m_r der $r$ten Art. $s$mal wird gezogen. Bei jeder Ziehung wird eine Kugel aus der Urne genommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in den p_1 ersten Ziehungen nur Kugeln der ersten, in den p_2 zweiten Ziehungen nur Kugeln der zweiten Art u. s. w., in den p_r letzten Ziehungen nur Kugeln der letzten Art erscheinen werden?

Durch das Zurückwerfen der gezogenen Kugel in die Urne bleibt die Zahl der Kugeln für jede neue Ziehung dieselbe. Bei Ermittelung der günstigen, so wie aller möglichen Kugelgruppen, die erscheinen können, kommen daher die Versetzungen mit Wiederholungen in Frage. In den p_1 ersten Ziehungen können also Kugeln der ersten Art auf $m_1^{p_1}$, in den p_2 folgenden Ziehungen Kugeln der zweiten Art auf $m_2^{p_2}$fache Weise erscheinen. Die Zahl der günstigen Gruppen ist daher

$$A = m_1^{p_1} . m_2^{p_2} . m_3^{p_3} \ldots . m_r^{p_r}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle wird durch die Gruppen-Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus so vielen Elementen als die Kugel-Anzahl angiebt, und zur sovielten Classe bestimmt, als Ziehungen gemacht werden. In Rücksicht auf 19. §. 10. meiner Combinations-Lehre ist hiernach die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1. \qquad w = \frac{m_1^{p_1} . m_2^{p_2} . m_3^{p_3} \ldots . m_r^{p}}{(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots . m_r)^{p_1 + p_2 \ldots p_r}}.$$

Hierin ist $s = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots . p_r$.

Die Bedingungen sind, wie oben. Die Ordnung, in welcher die Gruppen der verschiedenen Kugel-Arten nach einander erscheinen sollen, wird aufgehoben; die Zahl aber, wie oft Kugeln von einerlei Art hintereinander erscheinen sollen, wird beibehalten. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit unter dieser Bedingung?

Die Anzahl der günstigen Kugelgruppen wird sich vergröfsern, und zwar sovielmal als die Kugelgruppen, welche den verschiedenen Arten zugehören, unter sich versetzt werden können. Hiernach ist

$$2. \quad w = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots.3.2.1.m_1^{p_1}.m_2^{p_2}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_1+m_2+m_3+m_4\ldots.m_r)^s}.$$

Die Bedingungen sind dieselben, wie oben. Die Wahrscheinlichkeit soll bestimmt werden, dafs in s Ziehungen überhaupt p_1 Kugeln der ersten, p_2 Kugeln der zweiten u. s. w., p_r Kugeln der $r$ten Art erscheinen werden?

In diesem Falle können die einzelnen Kugeln der verschiedenen Arten in jeder beliebigen Stellung untereinander erscheinen. Dies ist in s Ziehungen möglich; wobei jedoch die Beschränkung gilt, dafs je p_1 Kugeln einer Art, je p_2 Kugeln einer zweiten Art u. s. w. zugehören, die in ihrer Beziehung untereinander die gleiche Eigenschaft haben und daher nicht die volle Anzahl Versetzungen, sondern Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen bilden. Die fragliche Wahrscheinlichkeit wird

$$3. \quad w = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots.3.2.1}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}.1^{p_3|1}\ldots.1^{p_r|1}} \cdot \frac{m_1^{p_1}.m_2^{p_2}.m_3^{p_3}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_1+m_2+m_3\ldots.m_r)^s}$$

sein. Hiebei ist $s=p_1+p_2+p_3+\ldots.p_r$. Diese Gleichung hätte sich auch aus dem Begriffe der Zerstreuungen der Elemente mehrerer Reihen in Fächer nach §. 12. meiner Combinationslehre ableiten lassen.

Wählen wir in der Gleichung 1. eine andere Ordnung, in welcher die verschiedenartigen Kugelgruppen erscheinen sollen, und bestimmen die zugehörige Wahrscheinlichkeit, so ergiebt sich leicht

$$4. \quad w = \frac{m_1^{p_1}.m_2^{p_2}.m_3^{p_3}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_1+m_2+m_3+\ldots.m_r)^s} = \frac{m_2^{p_2}.m_1^{p_1}.m_3^{p_3}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_2+m_1+m_3+\ldots.m_r)^s}$$
$$= \frac{m_3^{p_3}.m_1^{p_1}.x_2^{p_2}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_3+m_1+m_2+\ldots.m_r)^s}.$$

Hieraus entnehmen wir folgenden Satz:

5. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, in welchem mehrere Fälle in bestimmter Ordnung auf einander folgen, bleibt unverändert, wenn auch die Ordnung, in welcher sich diese Fälle aneinander anschliefsen sollen,

geändert, oder wenn eine bestimmte Reihenfolge in diesen Fällen durch eine andere beliebige bestimmte Reihenfolge vertreten wird.

In einer Urne sind r Kugel-Arten enthalten. Die erste zählt m_1, die zweite m_2, die dritte m_3 u. s. w., die $r$te m_r Kugeln. $s$mal wird gezogen und jedesmal eine Kugel herausgenommen, die nach der Ziehung nicht in die Urne zurückgeworfen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in den p_1 ersten Ziehungen nur Kugeln der ersten, in den p_2 folgenden nur Kugeln der zweiten u. s. w., in den p_r letzten Ziehungen nur Kugeln der letzten Art erscheinen werden?

Da die gezogene Kugel nicht wieder in die Urne geworfen wird, so können hier keine Kugeln wiederholt erscheinen und es kommen daher bei Ermittlung der günstigen, so wie aller möglichen Kugelgruppen, die Versetzungen ohne Wiederholungen in Betrachtung. In den p_1 ersten Ziehungen können daher nur Kugeln der ersten Art auf $m_1^{p_1|-1}$, in den p_2 folgenden nur Kugeln der zweiten Art auf $m_2^{p_2|-1}$fache Weise erscheinen u. s. w. In s hintereinander folgenden Ziehungen können aber Kugeln aus allen möglichen Arten auf $(m_1+m_2+m_3+\ldots . m_r)^{s|-1}$fache Weise (14. §. 8. pag. 10 m. Comb. Lehre) erscheinen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$6. \quad w = \frac{m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1} . m_3^{p_3|-1} + \ldots . m_r^{p_r|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\ldots . m_r)^{s|-1}}.$$

Hierin ist $p_1+p_2+p_3+\ldots .+p_r = s$.

Für jede andere beliebige, aber bestimmte Reihenfolge im Erscheinen der verschiedenartigen Kugelgruppen bleibt die vorstehende Gleichung, also auch die Wahrscheinlichkeit, dafs das in Frage stehende Ereignifs eintreffen werde, ungeändert, und wir begegnen auch hier dem in (5.) angegebenen Satze. Ist aber die Ordnung, in welcher die Gruppen der verschiedenen Kugel-Arten erscheinen sollen, nicht eine bestimmte, sondern gleichgültig, so kommen auch hier die Schlüsse, welche zur Gleichung (2.) gemacht wurden, in Anwendung, und die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den vorher angegebenen Bedingungen r verschiedenartige Kugelgruppen, und von jeder Art eine bestimmte Anzahl hinter einander erscheinen werden, ist

$$7. \quad w = \frac{r^{r|-1} m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1} . m_3^{p_3|-1} \ldots . m_r^{p_r|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\ldots . m_r)^{p_1+p_2+\ldots . p_r|-1}}.$$

§. 5.

In einer Urne befinden sich zweierlei Kugeln: m_1 Kugeln von der ersten und m_2 von der zweiten Art. Man nimmt (p_1+p_2) Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln in die Urne zurückzuwerfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs überhaupt p_1 Kugeln der ersten und p_2 Kugeln der zweiten Art erscheinen werden?

Da keine bestimmte Ordnung für das Erscheinen der Kugeln vorgeschrieben ist, so können sie in jeder möglichen Zusammenstellung erscheinen. p_1 Kugeln der ersten Art können daher durch alle Ziehungen zerstreut erscheinen, wenn nur die übrigen Ziehungen p_2 Kugeln der zweiten Art zeigen. Die Zahl der günstigen Fälle kommt daher mit der Anzahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Elemente zweier Reihen in (p_1+p_2) Fächer so zerstreut werden, dafs die der ersten p_1 und die der zweiten die übrigen Fächer einnehmen, während sie Versetzungen bilden. Die gesuchte Gruppen-Anzahl ist nach §. 42. No. 131. pag. 99 m. Comb. Lehre

$$\frac{(p_1+p_2)^{p_1|-1}}{1^{p_1|-1}}\, m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}.$$

Hieraus ist die Wahrscheinlichkeit

$$1.\quad w = \frac{(p_1+p_2)^{p_1|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}}{1^{p_1|1}(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}} = \frac{(p_2+p_2)^{p_2|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}}{1^{p_2|1}(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}}.$$

In einer Urne sind r Kugel-Arten enthalten, m_1 der ersten, m_2 der zweiten, m_3 der dritten u. s. w., m_r der $r$ten Art. Man nimmt die Kugeln einzeln heraus, ohne sie in die Urne zurückzuwerfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs p_1 Kugeln der ersten, p_2 der zweiten, u. s. w., p_r der $r$ten Art erscheinen werden.

Durch weitere Verfolgung der eben angegebenen Schlufsweise ergiebt sich für diese Wahrscheinlichkeit folgender Ausdruck:

$$2.\quad w = \Big[\frac{(p_1+p_2+\ldots . p_r)^{p_1|-1}}{1^{p_1|1}} m_1^{p_1|-1} . \frac{(p_2+p_3+\ldots . p_r)^{p_2|-1}}{1^{p_2|1}} m_2^{p_2|-1}$$

$$\times \frac{(p_3+p_4+\ldots . p_r)^{p_3|-1}}{1^{p_3|1}} m_3^{p_3|-1} \ldots . \frac{(p_{r-1}+p_r)^{p_{r-1}|-1}}{1^{p_{r-1}|1}} m_{r-1}^{p_{r-1}|-1} . m_r^{p_r|-1}\Big]$$

$$:(m_1+m_2+m_3+\ldots . m_r)^{p_1+p_2+p_3+\ldots . p_r|-1},$$

oder anders:

$$3.\quad w = \frac{(p_1+p_2+p_3+\ldots . p_r)^{p_1+p_2+p_3+\ldots . p_r|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1} . m_3^{p_3|-1} \ldots . m_r^{p_r|-1}}{1^{p_1|1} . 1^{p_2|1} . 1^{p_3|1} \ldots . 1^{p_r|1}(m_1+m_2+m_3+\ldots . m_r)^{p_1+p_2+\ldots . p_r|-1}}.$$

Der Zähler in 2. giebt die Anzahl der Gruppen an, welche entstehen, wenn die Elemente von r Reihen in $(p_1+p_2+p_3+\ldots. p_r)$ Fächer zerstreut werden, so dafs p_1 Elemente der ersten, p_2 Elemente der zweiten u. s. w., p_r Elemente der $r$ten Reihe in den Fächern vorkommen, und zugleich unter sich Versetzungen in allen möglichen Stellungen bilden. Er rechtfertigt sich aus 41. und 42. der angeführten Schrift und ergänzt und verallgemeinert die dortigen Sätze.

In einer Urne befinden sich zweierlei Kugeln, m_1 der ersten und m_2 der zweiten Art. (p_1+p_2) Kugeln werden auf einmal herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs p_1 Kugeln der ersten und p_2 Kugeln der zweiten Art erscheinen werden?

Es ist nach dem Sinne der Frage unzweifelhaft, dafs nur diejenigen Gruppen in Betrachtung kommen, die nicht die nämlichen Kugeln in verschiedener Stellung, sondern verschiedene Kugeln in sich begreifen; denn die nämlichen Kugeln in verschiedener Stellung untereinander geben keine neuen Resultate. Hiernach müssen bei diesen Gruppen die Versetzungen ausgeschlossen werden, und die Gruppen selbst fallen mit der Vertheilung der Elemente in Fächer zusammen. Wir erhalten die Zahl der günstigen Gruppen nach §. 39. pag. 90 der Comb. Lehre durch folgenden Ausdruck:

$$A = \frac{m_1^{m_1|-1}}{1^{p_1|1} . 1^{m_1-p_1|1}} \cdot \frac{m_2^{m_2|-1}}{1^{p_2|1} . 1^{m_2-p_2|1}} = \frac{m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}}{1^{p_1|1} . 1^{p_2|1}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$4. \quad w = \frac{m_1^{p_1|-1}}{1^{p_1|1}} \cdot \frac{m_2^{p_2|-1}}{1^{p_2|1}} : \frac{(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}}{1^{p_1+p_2|1}}$$

$$= \frac{(p_1+p_2)^{p_1+p_2|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}}{1^{p_1|1} . 1^{p_2|1} (m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}}$$

$$= \frac{(p_1+p_2)^{p_1|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}}{1^{p_1|1} (m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}} = \frac{(p_1+p_2)^{p_2|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}}{1^{p_2|1} (m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}}.$$

In einer Urne sind r verschiedene Kugelarten enthalten, m_1 Kugeln der ersten, m_2 der zweiten u. s. w., m_r der $r$ten Art. Es werden $(p_1+p_2+p_3 \ldots. p_r)$ Kugeln auf einmal herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs p_1 Kugeln der ersten, p_2 der zweiten u. s. w., p_r der $r$ten Art erscheinen werden?

Setzt man die eben angegebene Schlufsweise weiter fort, so gelangt man durch sie zu folgenden Ausdruck der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$5.\quad w=\frac{(p_1+p_2+p_3+\dots p_r)^{p_1+p_2+\dots p_r|-1}\,.\,m_1^{p_1|-1}\,.\,m_2^{p_2|-1}\,.\,m_3^{p_3|-1}\dots m_r^{p_r|-1}}{1^{p_1|1}\,.\,1^{p_2|1}\,.\,1^{p_3|1}\dots\,1^{p_r|1}\,(m_1+m_2+m_3+\dots m_r)^{p_1+p_2+p_3+\dots p_r|-1}}.$$

In einer Urne sind r Arten von Kugeln enthalten: m_1 Kugeln der ersten, m_2 der zweiten, m_3 der dritten Art u. s. w. Man nimmt $(p_1+p_2+p_3+\dots p_r)$ Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln in die Urne zurückzuwerfen, und bringt sie in eine Abtheilung zusammen; dann nimmt man $(q_1+q_2+q_3\dots q_r)$ Kugeln heraus und bringt sie in eine zweite Abtheilung. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Abtheilung p_1 Kugeln der ersten, p_2 der zweiten u. s. w., p_r Kugeln der $r$ten; in der zweiten Abtheilung q_1 Kugeln der ersten, q_2 Kugeln der zweiten u. s. w., q_r Kugeln der $r$ten Art erscheinen werden?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn wir die Gleichung 2. oder 3. auf den vorliegenden Fall wiederholt anwenden. Die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Abtheilung Kugelgruppen von der genannten Mischung erscheinen werden, ist die dort angegebene. Die Wahrscheinlichkeit, dafs in der zweiten Abtheilung Kugelgruppen von der genannten Mischung erscheinen werden, ergiebt sich aus den nämlichen Gleichungen, wenn man bemerkt, dafs nur noch (m_1-p_1) Kugeln der ersten, (m_2-p_2) Kugeln der zweiten Art u. s. w., (m_r-p_r) Kugeln der $r$ten Art in der Urne vorhanden sind. Diese Werthe sind daher in 2. oder 3. zu setzen und die so erhaltenen Resultate mit einander zu verbinden. Demnach ist die fragliche Wahrscheinlichkeit

$$w=\frac{(p_1+p_2+\dots p_r)^{p_1+p_2+\dots p_r|-1}\,.\,m_1^{p_1|-1}\,.\,m_2^{p_2|-1}\dots m_r^{p_r|-1}\,(q_1+q_2+\dots q_r)^{q_1+q_2+\dots q_r|-1}}{1^{p_1|1}\,.\,1^{p_2|1}\dots 1^{p_r|1}\,(m_1+m_2+\dots m_r)^{p_1+p_2+\dots p_r|-1}\,.\,1^{q_1|1}\,.\,1^{q_2|1}\dots 1^{q_r|1}}$$
$$\times\frac{(m_1-p_1)^{q_1|-1}\,.\,(m_2-p_2)^{q_2|-1}\,(m_3-p_3)^{q_3|-1}\dots(m_r-p_r)^{q_r|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\dots m_r-(p_1+p_2+p_3+\dots p_r)+1)^{q_1+q_2+q_3+\dots q_r|-1}}.$$

Der Ausdruck vereinfacht sich sehr, wenn die zusammengehörigen Facultäten vereinigt werden. Es ist.

$$6.\quad w=\frac{1^{p_1+p_2+\dots p_r|1}\,.\,1^{q_1+q_2+\dots q_r|1}\,.\,m_1^{p_1+q_1|-1}\,.\,m_2^{p_2+q_2|-1}\,.\,m_3^{p_3+q_3|-1}\dots m_r^{p_r+q_r|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\dots m_r)^{p_1+p_2+\dots p_r+q_1+q_2+\dots q_r|-1}\,.\,1^{p_1|1}\,.\,1^{p_2|1}\dots 1^{p_r|1}\,.\,1^{q_1|1}\,.\,1^{q_2|1}\dots 1^{q_r|1}}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Man bringt $(p_1+p_2+p_3+\dots p_r)$ Kugeln aus der Urne in eine Abtheilung, $(q_1+q_2+q_3+\dots q_r)$ Kugeln in eine zweite, $(r_1+r_2+\dots r_r)$ Kugeln in eine dritte u. s. w., $(\nu_1+\nu_2+\dots\nu_r)$ in die letzte ($k$te)

Abtheilung. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Abtheilung p_1 Kugeln der ersten, p_2 Kugeln der zweiten u. s. w., p_r Kugeln der $r$ten Art, in der zweiten Abtheilung q_1 Kugeln der ersten, q_2 der zweiten u. s. w., q_r der $r$ten Art u. s. w., in der letzten ν_1 Kugeln der ersten, ν_2 der zweiten u. s. w., ν_r Kugeln der $r$ten Art enthalten sein werden?

Setzt man die vorhin gemachte Schlufsweise fort, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgender Ausdruck:

$$7. \quad w = \frac{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}.1^{z_3}\dots 1^{z_k|1}.m_1^{u_1|-1}.m_2^{u_2|-1}.m_3^{u_3|-1}\dots m_r^{u_r|-1}}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}\dots 1^{p_r|1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\dots 1^{q_r|1}\dots 1^{\nu_1|1}.1^{\nu_2|1}\dots 1^{\nu_r|1}(m_1+m_2+m_3+\dots m_r)^{z_1+z_2+z_3+\dots z_k|-1}}.$$

Hier gelten folgende Bedingungsgleichungen:

$$p_1+p_2+p_3+\dots p_r = z_1,$$
$$q_1+q_2+q_3+\dots q_r = z_2,$$
$$r_1+r_2+r_3+\dots r_r = z_3,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\dots \nu_r = z_k,$$

und

$$p_1+q_1+r_1+\dots \nu_1 = u_1,$$
$$p_2+q_2+r_2+\dots \nu_2 = u_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_r+q_r+r_r+\dots \nu_r = \nu_r.$$

Ferner kann $u_1 \gtreqless m_1$, $u_2 \gtreqless m_2$, $u_3 \gtreqless m_3$, ... $u_r \gtreqless m_r$ sein.

In einer Urne sind r Arten von Kugeln enthalten: m_1 Kugeln der ersten, m_2 der zweiten Art u. s. w. Man nimmt $(p_1+p_2+p_3+\dots p_r)$ Kugeln auf einmal heraus und bringt sie in eine Abtheilung; dann $(q_1+q_2+q_3+\dots q_r)$ und bringt sie eine zweite u. s. f.; endlich $(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\dots \nu_r)$ Kugeln und bringt sie in die $k$te Abtheilung. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Abtheilung p_1 Kugeln der ersten, p_2 Kugeln der zweiten u. s. w., p_r Kugeln der $r$ten Art; in der zweiten q_1 Kugeln der ersten, q_2 der zweiten u. s. w., q_r der $r$ten Art enthalten sein werden u. s. f.?

Benutzen wir die Gleichung 5. auf dieselbe Weise, wie wir so eben die Gleichung 2. oder 3. zur Auffindung der Gleichungen 6. und 7. benutzten, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgende Formel:

$$8. \quad w = \frac{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}.1^{z_3|1}\dots 1^{z_k|1}.m_1^{u_1|-1}.m_2^{u_2|-1}.m_3^{u_3|-1}\dots m_r^{u_r|-1}}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}\dots 1^{p_r|1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\dots 1^{q_r|1}\dots 1^{\nu_1|1}.1^{\nu_2|1}\dots 1^{\nu_r|1}(m_1+m_2+m_3+\dots m_r)^{z_1+z_2+\dots z_k|-1}}.$$

Die Bedingungsgleichungen sind dieselben wie in 7. Werden unter den angegebenen Bedingungen alle Kugeln aus der Urne gezogen und in Abtheilungen vertheilt, so bleiben die Gleichungen 7. und 8. noch immer in Kraft; die Bedingungsgleichungen erfahren aber einige Modificationen und gehen in folgende über:

$$9. \begin{cases} p_1+p_2+p_3+\dots p_r = z_1, \\ q_1+q_2+q_3+\dots q_r = z_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\dots \nu_r = z_r, \\ p_1+q_1+r_1+\dots \nu_1 = m_1 = u_1, \\ p_2+q_2+r_2+\dots \nu_2 = m_2 = u_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_r+q_r+r_r+\dots \nu_r = m_r = u_r. \end{cases}$$

In diesem Falle müssen natürlich gerade so viele Fächer angenommen werden, als Kugel-Arten vorhanden sind.

Die Gleichungen 3. und 5., 7. und 8. stimmen an Inhalt überein. Dies rechtfertigt folgende Behauptung:

10. Unter den oben angegebenen Bedingungen ist es hinsichtlich des Erfolges einerlei, ob irgend eine Anzahl von Kugeln einzeln oder in Masse aus einer Urne herausgenommen und in eine oder mehrere Abtheilungen gebracht wird; denn die unter beiden Voraussetzungen gewonnenen Wahrscheinlichkeiten sind gleich grofs.

Dieser Satz findet in allen Fällen Anwendung, wenn nicht eine bestimmte Ordnung bei dem Erscheinen der einzelnen Kugeln in Betracht kommt. Letzteres ist bei dem Lotto der Fall, weil in diesem Spiele der bestimmte Auszug und die bestimmte Ambe besetzt werden können. Hier müssen deshalb die Nummern einzeln gezogen werden. Bei den Cartenspielen z. B. findet der Satz seine Anwendung, und es können die Blätter einzeln oder partieenweise ausgegeben werden. Bei hinlänglicher Mischung, welche der Calcul voraussetzt, wird es auch in der That einerlei sein, auf welche Weise die Blätter ausgegeben werden. Da aber dies nicht immer sorgfältig geschieht, so giebt das Vertheilen in einzelnen Blättern eine bessere Mischung.

Sind die Anzahlen der verschiedenen Kugel-Arten einander gleich, also $m_1 = m_2 = \dots m_r = m$, und ebenso die Zahl der Kugeln, welche in

die verschiedenen Abtheilungen gebracht werden sollen, so ergeben sich einfachere Ausdrücke. Aus 7. oder 8. und 9. wird

$$11.\quad w = \frac{(1^{s|1})^s}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}\ldots.1^{p_r|1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\ldots.1^{q_r|1}\ldots.1^{\nu_1|1}.1^{\nu_2|1}\ldots.1^{\nu_r|1}(rm)^{rm|-1}}.$$

Die Gleichungen 7. und 8. sind übrigens ganz allgemein; denn sie gelten noch, wenn auch nicht in jeder Abtheilung Kugeln von allen Arten vorkommen sollten. Für diesen Fall sind die Exponenten der betreffenden Facultäten 0 zu setzen; wodurch die Gültigkeit der genannten Gleichungen in nichts geändert wird.

Die Anordnung bei der Vertheilung in Fächer ist daher der Willkür überlassen.

§. 6.

In einer Urne sind m weifse und n nicht weifse Kugeln enthalten. Man nimmt r Kugeln auf einmal heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs r weifse Kugeln erscheinen werden?

Die Zahl der der Erwartung günstigen Kugelgruppen, ist, wie sich leicht ergiebt, $\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}$. Die Zahl aller möglichen Gruppen ist $\frac{(m+n)^{r|-1}}{1^{r|1}}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$1.\quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Das nämliche Resultat ergiebt sich aus 7. §. 4., wenn dort $m_1 = m$, $m_2 = n$, $p_1 = r$, $p_2 = 0$ und $r = 1$ gesetzt wird.

Die Mischung der Kugeln ist die gleiche. Zwei Ziehungen werden gemacht. In der ersten werden p Kugeln herausgenommen und, ohne die Mischung zu untersuchen, bei Seite gesetzt. In der zweiten werden r Kugeln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs r weifse Kugeln in der zweiten Ziehung erscheinen werden?

Folgende Fälle können in der ersten Ziehung vorausgegangen sein:

$$2.\quad \begin{cases} p \text{ weifse Kugeln und } 0 \text{ nicht weifse,} \\ p-1 \text{ - - - - - } 1 \text{ - - - -} \\ p-2 \text{ - - - - - } 2 \text{ - - - -} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 \text{ - - - - - } p-1 \text{ - - - -} \\ 0 \text{ - - - - - } p \text{ - - - -} \end{cases}$$

Benutzt man die Gleichung 4. §. 5., so sind die diesen Fällen entsprechenden Kugelgruppen:

$$\frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}} + \frac{n}{1}\cdot\frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} + \dots \frac{m}{1}\cdot\frac{n^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} + \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Mit jedem dieser Fälle sollen p weifse Kugeln in der zweiten Ziehung in Verbindung treten. Im ersten Falle sind nur noch $(m-p)$, im zweiten $(m-p+1)$, im dritten $(m-p+2)$ u. s. w., im $(p+1)$ten Falle m weifse Kugeln in der Urne zurück. Diese Bemerkung führt zu folgender, der Erwartung günstigen Gruppen-Anzahl, wenn wir für jeden einzelnen Fall die Gleichung zu 4. §. 5. mit Rücksicht auf die veränderte Kugel-Anzahlen benutzen:

$$A = \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{(m-p)^{r|-1}}{1^{r|1}} + \frac{n}{1}\cdot\frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\cdot\frac{(m-p+1)^{p|-1}}{1^{p|1}} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{p-2|r1}}{1^{p-2|1}}\cdot\frac{(m-p+2)^{p|-1}}{1^{p|1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{n^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\cdot m\,\frac{(m-1)^{p|-1}}{1^{p|1}} + \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}$$

$$= \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\left[\frac{(m-r)^{p|-1}}{1^{p|1}} + \frac{n}{1}\cdot\frac{(m-r)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(m-r)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} + \dots \frac{n^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\cdot\frac{m-r}{1} + \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}\right],$$

nemlich, wenn die Facultät $\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}$ ausgeschieden wird und die zur Ausscheidung nöthigen Veränderungen gemacht werden.

Nun findet bekanntlich folgende Gleichung Statt:

$$3.\quad \frac{(a+b)^{x|-1}}{1^{x|1}} = \frac{a^{x|-1}}{1^{x|1}} + \frac{a^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}}\cdot\frac{b}{1} + \frac{a^{x-2|-1}}{1^{x-2|-1}}\cdot\frac{b^{2|-1}}{1^{2|1}} + \dots \frac{a}{1}\cdot\frac{b^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} + \frac{b^{x|-1}}{1^{x|1}}.$$

Wird die Gleichung 3. auf den vorhergehenden, in Klammern eingeschlossenen Ausdruck angewendet, so ist

$$A = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{(m+n-r)^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Die Zahl aller möglichen Kugelgruppen, wenn unter den oben genannten Bedingungen p und r Kugeln in zwei Abtheilungen aus der Urne genommen werden, ist

$$A_1 = \frac{(m+n)^{p+r|-1}}{1^{r|1}.1^{p|1}} = \frac{(m+n)^{r|-1}.(m+n-r)^{p|-1}}{1^{r|1}.1^{p|1}}.$$

Hieraus ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$4.\quad w = \frac{A}{A_1} = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Unter den oben angegebenen Bedingungen werden drei Ziehungen aus der Urne gemacht. Bei der ersten werden p, bei der zweiten q Kugeln herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in besondere Abtheilungen gebracht. Bei der dritten werden r Kugeln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der dritten Ziehung nur r weifse Kugeln erscheinen werden?

Die Fälle, auf deren Betrachtung die Beantwortung der vorliegenden Frage beruht, und die in dem Schema 2. angegeben wurden, bleiben ungeändert. An jeden einzelnen Fall schliefsen sich die in dem nachfolgenden Schema verzeichneten Fälle an, welche in der zweiten Ziehung eintreten können:

5.	q	weifse	Kugeln	und	0	nicht	weifse	werden	gezogen,
	$q-1$	-	-	-	1	-	-	-	-
	$q-2$	-	-	-	2	-	-	-	-
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	1	-	-	-	$q-1$	-	-	-	-
	0	-	-	-	q	-	-	-	-

An jede Verbindung von je zwei in dem Schema 2. und 5. angegebenen Fällen knüpft sich die Erscheinung von r weissen Kugeln in der dritten Ziehung. Wir erhalten nun durch den Zusammentritt des ersten Falles im Schema 2. mit allen Fällen des Schema's 5. und mit r weifsen Kugeln der dritten Ziehung folgende Anzahl:

$$A_1 = \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}\left[\frac{(m-p)^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot\frac{(m-p-q)^{r|-1}}{1^{r|1}} + n.\frac{(m-p)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\cdot\frac{(m-q-p+1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right.$$
$$\left. + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(m-p)^{q-2|-1}}{1^{q-2|1}}\cdot\frac{(m-p-q+2)^{r|-1}}{1^{r|1}} + \ldots \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot\frac{(m-p)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]$$
$$= \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{(m-p)^{r|-1}}{1^{r|1}}\left[\frac{(m-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} + n.\frac{(m-p-r)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(m-p-r)^{q-2|-1}}{1^{q-2|1}}\right.$$
$$\left. + \ldots \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\right],$$

$$6.\quad A_1 = \frac{m^{p+r|-1}}{1^{p|1}.1^{r|1}}\cdot\frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{(m-r)^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}}.$$

Dieser Ausdruck entsteht, wenn die Facultät $\frac{(m-p)^{r|-1}}{1^{r|1}}$ ausgeschieden und dann die erhaltene Reihe nach 3. behandelt wird. Durch den Zusammentritt des zweiten Falles im Schema 2. mit allen Fällen im Schema 5. und weitern r weifsen Kugeln in der dritten Ziehung erhalten wir folgende Anzahl:

$$A_2 = \frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{n}{1} \Big[\frac{(m-p+1)^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot \frac{(m-p-q+1)^{r|-1}}{1^{r|1}} + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{(m-p-q+2)^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

$$+ \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{q-2|1}}{1^{q-2|1}} \cdot \frac{(m-p-q+3)^{r|-1}}{1^{r|1}} + \ldots \frac{(n-1)^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{r|-1}}{1^{r|1}} \Big]$$

$$= \frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{(m-p+1)^{r|-1}}{1^{r|1}} \Big[\frac{(m-p-r+1)^{q|-1}}{1^{q|1}} + \frac{(n-1)}{1} \cdot \frac{(m-p-r+1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

$$+ \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-p-r+1)^{q-2|-1}}{1^{q-2|1}} + \ldots \frac{(n-1)^{q|-1}}{1^{q|-1}} \Big],$$

$$7. \quad A_2 = \frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot n \frac{(m-p+1)^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot n \frac{(m-r)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}}.$$

Durch den Zusammentritt des dritten Falles im Schema 2. mit sämmtlichen Fällen im Schema 5. und mit r weifsen Kugeln in der dritten Ziehung erhalten wir durch eine ähnliche Behandlungsweise folgende Anzahl:

$$8. \quad A_3 = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-r)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, die Fälle im Schema 2. der Reihe nach mit sämmtlichen Fällen im Schema 5. und mit r weifsen Kugeln in der dritten Ziehung zusammentreten zu lassen, so ergiebt sich aus 6., 7., 8. u. s. w. folgender Ausdruck:

$$9. \quad A = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} \Big[\frac{(m-r)^{p|-1}}{1^{p|1}} + n \frac{(m-r)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-r)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} + \ldots + \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} \Big]$$

$$= \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m+n-r)^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m+n-r)^{p+q|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1}};$$

wie sich durch Benutzung der Gleichung 3. ergiebt. Die Zahl aller möglichen Fälle, welche entstehen, wenn $(m+n)$ Kugeln in drei Abtheilungen zu p, q und r Kugeln vertheilt werden, ist

$$10. \quad B = \frac{(m+n)^{p+q+r|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1} \cdot 1^{r|1}} = \frac{(m+n)^{r} (m+n-r)^{p+q|-1}}{1^{r|1} \cdot 1^{p|1} \cdot 1^{q|1}}.$$

Aus 9. und 10. ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$11. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht weiter fortsetzen und auf das Erscheinen von r weifsen Kugeln in jeder beliebigen spätern Ziehung übertragen. Werden daher $(k-1)$ Ziehungen gemacht, in welchen p_1, p_2, p_3, ... p_{k-1} Kugeln, ohne die Mischung der erschienenen Kugeln zu untersuchen, herausgenommen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs

in der $k$ten Ziehung r weiſse Kugeln erscheinen werden, wenn r Kugeln in dieser Ziehung herausgenommen werden,

$$12. \qquad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Die Vergleichung der unter 1. 4. 11. und 12. gefundenen Resultate führt zu folgendem Satze:

13. Werden aus einer Urne, welche m Kugeln von einer und n von einer andern Art enthält, mehrere Ziehungen gemacht, in diesen Ziehungen $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_r$ Kugeln herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in verschiedene Abtheilungen gebracht, so ist die Wahrscheinlichkeit in irgend einer Abtheilung, in welche gerade p_k Kugeln auf einmal gebracht wurden, nur Kugeln der einen Art zu erhalten, so groſs als die Wahrscheinlichkeit, Kugeln derselben Art in einer früheren oder späteren Abtheilung zu erhalten, wenn die gleiche Zahl von Kugeln (p_k) in dieser Abtheilung vorkommt.

Die Zahl der vorhergegangenen Ziehungen und die Zahl der darin erschienenen Kugeln hat hiernach auf die fragliche Wahrscheinlichkeit unter den genannten Bedingungen keinen Einfluſs. An diese Bemerkung knüpft sich unmittelbar folgender Satz:

14. Sollen aus einer Urne, in welcher zweierlei Kugeln enthalten sind, mehrere Ziehungen gemacht, bei denselben $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_r$ Kugeln herausgenommen und die Kugeln, ohne ihre Mischung zu kennen, in verschiedene Abtheilungen gebracht werden, und wünscht man in einer Abtheilung nur p_k Kugeln von der einen Art zu erhalten, so ist die Ordnung, in welcher die genannten Kugelmengen herausgenommen und in die Abtheilungen gebracht werden, gleichgültig.

Sind aber unter den genannten Bedingungen schon mehrere Ziehungen gemacht, und kennt man die Mischung der dabei erschienenen Kugeln, so ändert sich das Verhältniſs der in der Urne zurückgebliebenen Kugeln; aber nicht die Schluſsweise. Sind nämlich schon a Kugeln der ersten und b der zweiten Art erschienen, so ist die Wahrscheinlichkeit, in irgend einer Ziehung, worin r Kugeln auf die oben angegebene Weise herausgenommen werden, nur Kugeln der ersten Art zu erhalten:

$$15. \qquad w = \frac{(m-a)^{r|-1}}{(m+n-a-b)^{r|-1}}.$$

Ist die Zahl der beiden Kugel-Arten gleich, also $m = n$, und wird nur

eine Kugel jedesmal herausgenommen, so geht 1. 4. 11. oder 12. in

$$16. \quad w = \tfrac{1}{2}$$

über. Die Wahrscheinlichkeit, bei jeder Ziehung eine weiſse Kugel erscheinen zu sehen, ist daher 0,5; wenn auch schon mehrere Kugeln gezogen sind, deren Mischung man nicht kennt.

Die bis jetzt gefundenen Resultate gelten vorerst nur von zwei Arten von Kugeln. Sie lassen sich jedoch leicht auf mehrere Arten von Kugeln ausdehnen. Es ist nur nöthig, einer Kugel-Art mehrere zusammen gegenüber zu stellen, und die zweite als Repräsentant von mehreren zu betrachten. Setzt man daher

$$n = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots . m_{s-1} \quad \text{und} \quad m = m_s,$$

so geht die Gleichung 12. in folgende über:

$$17. \quad w = \frac{m_s^{r|-1}}{(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots . m_s)^{r|-1}}.$$

Die hier gefundenen Gesetze gelten, wenn sich das Erscheinen von Kugeln einer Art nur auf eine Ziehung erstreckt. Sie gelten aber auch, wenn es sich auf mehrere Ziehungen erstreckt. Dies führt zu folgender Frage:

In einer Urne befinden sich s Arten von Kugeln, von denen die erste m_1, die zweite m_2, die dritte m_3 u. s. w., die $s$te m_s Kugeln zählt. Man zieht zweimal und nimmt in der ersten Ziehung p, in der zweiten q Kugeln heraus. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs in beiden Ziehungen nur Kugeln von einer Art (m_1) erscheinen werden.

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich aus §. 2. leicht. Sie ist

$$A = \frac{m_1^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{(m_1 - p)^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1}}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist, aus den nämlichen Gründen,

$$A_1 = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots . m_s)^{p+q|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$18. \quad w = \frac{m_1^{p+q|-1}}{(m_1 + m_2 + \ldots . m_s)^{p+q|-1}}.$$

Die Bedingungen sind dieselben. Man zieht dreimal, nimmt in der ersten Ziehung k Kugeln heraus, die man, ohne ihre Mischung zu kennen, in eine Abtheilung bringt. In der zweiten Ziehung nimmt man p, in der dritten q Kugeln heraus. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs in den beiden letzten Ziehungen nur Kugeln von einer bestimmten Art (m_1) erscheinen werden? Es sind folgende Fälle zu untersuchen.

In der ersten Ziehung erscheinen

$$19.\quad \left\{\begin{array}{llll} p & \text{Kugeln der bestimmten Art,} & 0 & \text{Kugeln von den übrigen Arten,} \\ p-1 & - \quad - \quad - \quad - & 1 & \text{Kugel} \quad - \quad - \quad - \quad - \\ p-2 & - \quad - \quad - \quad - & 2 & \text{Kugeln} \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \text{Kugel} \quad - \quad - \quad - & p-1 & - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ 0 & - \quad - \quad - \quad - & p & - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right.$$

Nach dem Früheren ist die Zahl der hiedurch bedingten Gruppen, wenn die Zahl der übrigen Kugel-Arten der Kürze wegen $m_2+m_3+m_4+\ldots m_s = n$ gesetzt wird,

$$m_1^{k|-1}+\frac{m_1^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}\cdot\frac{n}{1}+\frac{m_1^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}\cdot\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}+\frac{m_1^{k-3|-1}}{1^{k-3|1}}\cdot\frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}+\ldots\frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}}.$$

Mit jedem dieser Fälle sollen $(p+q)$ Kugeln von der bestimmten Art in den zwei folgenden Ziehungen in Verbindung treten. Es findet sich

$$A=\frac{m_1^{k|-1}}{1^{k|1}}\cdot\frac{(m_1-k)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}+n.\frac{m^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}\cdot\frac{(m_1-k+1)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}$$

$$+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m_1^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}\cdot\frac{(m_1-k+2)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}+\ldots\frac{n^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}\cdot\frac{m_1}{1}\cdot\frac{(m_1-1)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}+\frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}}.$$

Wird aus den Gliedern dieses Ausdrucks die Facultät $\frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}$ ausgeschieden, so geht derselbe in folgenden über:

$$A=\frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}\left[\frac{(m_1-p-q)^{k|-1}}{1^{k|1}}+n\frac{(m_1-p-q)^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(m_1-p-q)^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}+\ldots\frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}}\right]$$

$$=\frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}\cdot\frac{(m_1+n-p-q)^{k|-1}}{1^{k|1}}=\frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}\cdot\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_s-p-q)^{k|-1}}{1^{k|1}}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist

$$A_1=\frac{(m_1+m_2+\ldots m_s)^{p+q+k|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}.1^{k|1}}.$$

Hieraus ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$20.\quad w=\frac{m_1^{p+q|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\ldots m_s)^{p+q|-1}}.$$

Dasselbe Resultat würde man erhalten haben, wenn man die Wahrscheinlichkeit bestimmt hätte, dafs in der ersten Ziehung p, in der dritten q Kugeln einer bestimmten Art erscheinen werden, während in der zweiten Ziehung k Kugeln herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in eine besondere Abtheilung gebracht werden.

Führen wir die obige Schlufsweise weiter fort, so finden wir leicht, dafs die Gleichung 20. unverändert bleibt, wenn auch Kugeln von einerlei Art in je zwei spätern Ziehungen, sie mögen unmittelbar, oder nicht unmittelbar aufeinander folgen, erscheinen sollen. Wird auch das in Frage stehende Ereignifs noch zusammengesetzter als bisher, so ändert sich doch an der Schlufsweise nichts; selbst nicht in dem Fall, wenn mehrere Kugel-Arten in den verschiedenen Abtheilungen vorkommen sollten. Berücksichtigen wir ferner, dafs dabei mehrere Kugel-Arten in einer und derselben Ziehung vorkommen können, und dafs die Ordnung unter den Kugelmengen, die in den verschiedenen Ziehungen erscheinen sollen, keine Aenderung des Resultats bedingt, so werden wir zu folgendem Satze geführt.

21. Werden aus einer Urne, die beliebig viele Kugel-Arten enthält, mehrere Ziehungen gemacht, bei denselben die Kugelmengen p_1, p_2, p_3, ... p_r herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in verschiedene Abtheilungen gebracht, und man dann verlangt, dafs in einer oder in mehreren Abtheilungen Kugeln von einer bestimmten Art oder von bestimmten Verhältnissen aus verschiedenen Arten enthalten sein sollen, so ist die Ordnung, nach welcher die Kugeln in die verschiedenen Abtheilungen gebracht werden, oder die Ordnung unter den verschiedenen Abtheilungen, gleichgültig, und es kann Jemand, der p_k Kugeln von beliebiger Mischung aus einer Abtheilung zu entnehmen wünscht, dazu jede beliebige Abtheilung wählen, wenn sie nur die gehörige Zahl von Kugeln enthält.

Sind schon mehrere Ziehungen gemacht, und ist das Verhältnifs der dabei erschienenen Kugeln bekannt, so ändert sich nach Maafsgabe der Gleichung 15. die Zahl der vorhandenen Kugeln; aber nicht die hier befolgte Schlufsweise.

Ein specieller Fall des hier behandelten allgemeinen Problems, nämlich No. 16., findet sich im *Journal de l'école polytechn. T. XV. Cah. XXIV. pag. 264—278* auf ziemlich weitläufigem Wege behandelt. Das dortige Problem ist nur in der Form von dem hier aufgestellten verschieden, und zugleich sehr speciell. Es läfst sich allgemeiner so stellen:

In einer Urne sind r Kugel-Arten enthalten. p Kugeln werden herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in eine zweite Urne gebracht. Man zieht von den Kugeln der zweiten Urne q Kugeln heraus, und findet, dafs sie einer bestimmten Art angehören. Darauf werden noch weiter s Ku-

geln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen s Kugeln der nämlichen Art angehören werden?

Dieses Problem fällt mit folgendem zusammen.

In einer Urne sind r Kugel-Arten enthalten. Man zieht q Kugeln aus der Urne und findet sie von einer bestimmten Art. In einer zweiten Ziehung nimmt man s Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs diese Kugeln der nämlichen Art angehören werden?

Denn es ist einerlei, ob man mehr als $(p+s)$ Kugeln (etwa p) auf einmal aus der Urne nimmt, in eine zweite Urne wirft, von diesen zuerst q Kugeln trennt, das Genannte bemerkt, dann noch weitere s Kugeln davon trennt und den Rest zurückwirft: oder ob man aus der ersten Urne direct zuerst q Kugeln und dann weiter s Kugeln herausnimmt, nachdem man an den q Kugeln der ersten Ziehung das Genannte bemerkt hat.

§. 7.

Im vorigen Paragraph wurde das gegebene Problem unter der Voraussetzung betrachtet, dafs die Kugeln auf einmal aus der Urne genommen werden. Die Kugeln können aber auch einzeln aus der Urne gezogen werden. Es fragt sich, ob dann die nämlichen Gesetze noch immer gelten? Dies führt zu folgender Frage.

In einer Urne sind zwei Arten von Kugeln enthalten, von welchen die erste m, die zweite n Kugeln zählt. Man zieht r Kugeln einzeln heraus und wirft die gezogenen Kugeln nicht in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen Kugeln von der ersten Art sind?

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen ist $m^{r|-1}$, die aller möglichen ist $(m+n)^{r|-1}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$1. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Man zieht zuerst p Kugeln einzeln heraus und bringt sie, ohne ihre Mischung zu kennen, in eine Abtheilung; dann nimmt man r Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln zurückzuwerfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in den r letzten Ziehungen nur Kugeln der ersten Art erscheinen werden?

Es sind hier folgende Fälle möglich. In den ersten p Ziehungen erscheinen

2.
p Kugeln der ersten Art und 0 Kugeln der zweiten,
$p-1$ - - - - - 1 Kugel - -
$p-2$ - - - - - 2 Kugeln - -
. . . .
0 - - - - - p - - -

Die Betrachtung des ersten Falles führt zu folgender Gruppen-Anzahl:

$$A_1 = m^{p|-1}.$$

Nach dem zweiten Falle kann eine Kugel zweiter Art mit $p-1$ Kugeln erster Art in Verbindung treten. Hiernach kommen die Zerstreuungen von zweierlei Elementen in p Fächer in Frage, so dafs ein Element der einen Reihe mit $p-1$ Elementen der andern zusammentritt. Nach §. 42. der Combinationslehre ist die zugehörige Gruppen-Anzahl

$$A_2 = \frac{p}{1} m^{p-1|-1} n.$$

Nach dem zweiten Falle kommen die Zerstreuungen von zweierlei Elementen in p Fächer in Frage, so dafs zwei Elemente der einen Reihe mit $p-2$ Elementen der andern Reihe in Verbindung treten. Die Gruppen-Anzahl ist

$$A_3 = \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} m^{p-2|-1} n^{2|-1}.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse ergiebt sich folgende Gruppen-Anzahl:

$$3.\quad A = m^{p|-1} + \frac{p}{1} m^{p-1|-1} n + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} m^{p-2|-1} n^{2|-1} + \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} m^{p-3|-1} n^3 + \ldots \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}} n^{p|-1}.$$

Mit jedem der in 3. aufgeführten Fälle sollen p Kugeln der ersten Art in den r folgenden Ziehungen zusammentreten. Dies führt zu folgendem Ausdrucke:

$$B = m^{p|-1}(m-p)^{r|-1} + \frac{p}{1}.n\,m^{p-1|-1}(m-p+1)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}.n^{2|-1} m^{p-2|-1}(m-p+2)^{r|-1} \ldots$$

$$\ldots + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}.n^{p-1|-1} m\,(m-1)^{r|-1} + \frac{p^{p|-1}}{1^{q|1}}.n^{p|-1} m^{r|-1}$$

$$= m^{r|-1}\left[(m-r)^{p|-1} + \frac{p}{1}.n(m-r)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}.n^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1} + \ldots n^{p|-1}\right].$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe läfst sich nach folgender Gleichung summiren:

$$4.\quad (a+b)^{x|-1} = a^{x|-1} + \frac{x}{1} a^{x-1|-1} b + \frac{x^{2|-1}}{1^{2|1}} a^{x-2|-1} b^2 + \ldots \frac{x^{x|-1}}{1^{x|1}} b^x.$$

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen ist demnach

$$B = m^{r|-1}(m+n-r)^{p|-1};$$

die aller möglichen ist

$$C = (m+n)^{p+r|-1} = (m+n)^{r|-1}(m+n-r)^{p|-1}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$5. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Vergleicht man die in 1. und 5. gefundenen Resultate mit denen im vorigen Paragraph gefundenen, 1. und 4., so liegt ihre Identität vor Augen. Setzt man nun die eben bezeichnete Schlufsweise weiter fort, so wird man auf folgenden Satz geführt:

6. Die im vorigen Paragraph gefundenen Gesetze gelten nicht nur, wenn die Kugelmengen auf einmal, sondern auch, wenn die Kugeln einzeln, aber in gleicher Zahl, aus der Urne genommen werden.

Die Art und Weise, wie die Kugeln aus der Urne genommen werden, hat also unter den vorliegenden Bedingungen auf das zu erwartende Resultat keinen Einflufs; wie wir solches auch schon unter andern Voraussetzungen in §. 4. und §. 5. gesehen haben.

§. 8.

In einer Urne sind m weifse und n schwarze Kugeln enthalten. Es wird $p$mal gezogen und jedesmal eine Kugel herausgenommen. So oft eine schwarze Kugel erscheint, wird sie zurückgeworfen, so oft eine weifse erscheint, wird sie durch eine schwarze ersetzt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach p Ziehungen r weifse Kugeln erscheinen, also noch $m-r$ weifse Kugeln in der Urne zurückgeblieben sind?

Die Wahrscheinlichkeit, unter den genannten Bedingungen eine weifse Kugel zu ziehen, ist $\frac{m}{m+n}$, die, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist $\frac{n}{m+n}$. Diese Wahrscheinlichkeiten bleiben unverändert, so lange nur schwarze Kugeln erscheinen. Sie ändern sich, sobald eine weifse Kugel erscheint. Die Zahl der weifsen Kugeln vermindert sich dann um eine; die der schwarzen vergröfsert sich um eine. Die Wahrscheinlichkeiten, eine weifse und eine schwarze Kugel zu ziehen, gehen dann in $\frac{m-1}{m+n}$ und $\frac{m+1}{m+n}$ über. Ist noch eine weitere weifse Kugel erschienen, so ändert sich die Zahl der Kugeln wiederholt, und die Wahrscheinlichkeiten gehen in $\frac{m-2}{m+n}$ und $\frac{m+2}{m+n}$ über u. s. w.

Zur Beantwortung der vorliegenden Frage werden wir durch Betrachtung einfacher Fälle gelangen. Wir bestimmen zuerst die Wahrschein-

lichkeit, daſs unter den genannten Bedingungen gerade eine weiſse Kugel (nicht mehr, nicht weniger) gezogen werde.

Soll dies geschehen, so müssen folgende Fälle eintreten: die weiſse Kugel erscheint entweder gerade im ersten, oder im zweiten, oder im dritten u. s. w., oder im $p$ten Zuge. Jeder Fall setzt voraus, daſs in den übrigen $p-1$ Zügen nur schwarze Kugeln erscheinen. Die Wahrscheinlichkeit, daſs die weiſse Kugel gerade in der ersten Ziehung erscheine, ist

$$w_1 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^{p-1}}{(m+n)^{p-1}} = \frac{m(n+1)^{p-1}}{(m+n)^p};$$

diejenige, daſs sie gerade in der zweiten Ziehung erscheine, setzt voraus, daſs in der ersten und in den $p-2$ letzten Ziehungen eine schwarze Kugel erscheine. Es ist also

$$w_2 = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^{p-2}}{(m+n)^{p-2}} = \frac{m.n(n+1)^{p-2}}{(m+n)^p}.$$

Diejenige, daſs sie gerade in der dritten Ziehung erscheine, erfordert das Vorausgehen von zwei und das Nachfolgen von $p-3$ schwarzen Kugeln. Sie ist

$$w_3 = \frac{n^2}{(m+n)^2} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^{p-3}}{(m+n)^{p-3}} = \frac{m.n^2(n+1)^{p-3}}{(m+n)^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs in der letzten Ziehung die weiſse Kugel erscheine, beruht auf dem Vorausgehen von $p-1$ schwarzen Kugeln. Sie ist

$$w_p = \frac{n^{p-1}}{(m+n)^{p-1}} \cdot \frac{m}{m+n} = \frac{m.n^{p-1}}{(m+n)^p}.$$

Einer dieser Fälle kann eintreten. Die Wahrscheinlichkeit für den angegebenen besondern Fall ist

$$1. \quad w = \frac{m}{(m+n)^p}\left[(n+1)^{p-1} + n(n+1)^{p-2} + n^2(n+1)^{p-3} + \ldots . n^{p-2}(n+1) + n^{p-1}\right].$$

Die in den Klammern eingeschlossenen Ausdrücke stellen sich als die Summenproducte der Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen $n, n+1$ zur $(p-1)$ten Classe nach §. 28. m. Combinationslehre dar. Diese Bemerkung führt zu folgender Formel:

$$2. \quad w = \frac{m}{(m+n)^p} . SC'(n, n+1)^{p-1}.$$

Wir suchen nun die Wahrscheinlichkeit, daſs in p Ziehungen gerade zwei weiſse Kugeln erscheinen werden.

Folgende Fälle genügen. Die beiden weifsen Kugeln erscheinen gerade in der 1ten u. 2ten, 1ten u. 3ten, 1ten u. 4ten u. s. w., 1ten u. $p$ten Ziehung, oder in der 2ten u. 3ten, 2ten u. 4ten, 2ten u. 5ten u. s. w., 2ten u. $p$ten Ziehung, oder in der 3ten u. 4ten, 3ten u. 5ten, 3ten u. 6ten u. s. w., 3ten u. $p$ten Ziehung u. s. w., oder endlich in der $(p-1)$ten und $p$ten Ziehung. Die Zahl dieser Fälle kommt mit den Zerstreuungen von zwei Elementen in p Fächer überein. Soll nun die jedem einzelnen Falle entsprechende Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, so ist zu beachten, dafs das Erscheinen einer schwarzen Kugel in den vorausgehenden, zwischenliegenden oder nachfolgenden Ziehungen mit in den Calcul aufgenommen werden mufs. Es ergeben sich daher folgende Ausdrücke für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$w_1 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(m-1)}{m+n} \cdot \frac{(n+2)^{p-2}}{(m+n)^{p-2}} = \frac{m^{2|-1}(n+2)^{p-2}}{(m+n)^p},$$

$$w_2 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n} \cdot \frac{(n+2)^{p-3}}{m+n} = \frac{m^{2|-1}(n+1)(n+2)^{p-3}}{(m+n)^p},$$

$$w_3 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^2}{(m+n)^2} \cdot \frac{m-1}{m+n} \cdot \frac{(n+2)^{p-4}}{(m+n)^{p-4}} = \frac{m^{2|-1}(n+1)^2(n+2)^{p-4}}{(m+n)^p},$$

. . . .

$$w_{p-1} = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^{p-2}(m-1)}{(m+n)^{p-2}(m+n)} = \frac{m^{2|-1}(n+1)^{p-2}}{(m+n)^p},$$

$$w_p = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(m-1)}{m+1} \cdot \frac{(n+2)^{p-3}}{(m+n)^{p-3}} = \frac{m^{2|-1}n(n+2)^{p-3}}{(m+n)^p},$$

. . . .

Der letzte Fall giebt

$$w_z = \frac{n^{p-z}m(m-1)}{(m+n)^{p-z}(m+n)(m+n)} = \frac{m^{z|-1}n^{p-z}}{(m+n)^p}.$$

Die Zähler dieser Wahrscheinlichkeiten sind die Productensummen der Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen n, $n+1$, $n+2$ zur $(p-2)$ten Classe, wenn man den allen gemeinschaftlichen Factor $m^{2|-1}$ ausstöfst. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$3. \quad w = \frac{m^{2|-1}}{(m+n)^p} SC'(n, n+1, n+2)^{p-2}.$$

Wird diese Untersuchung auf dem bezeichneten Wege fortgeführt, so ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit des oben aufgestellten allgemeinen Problems folgender Ausdruck:

$$4. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^p} SC'(n, n+1, n+2, n+3, \ldots n+r)^{p-r}.$$

Setzt man $r = m$, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen alle weifse Kugeln erscheinen werden. Sie ist

$$5.\quad w = \frac{1^{m|1}}{(m+n)^p} SC'(n,\ n+1,\ n+2,\ \dots\ n+m)^{p-m}.$$

Obgleich diese Gleichungen nur formell sind, so haben sie doch den Vortheil, dafs sich die in §. 28. der Combinationslehre gegebenen Entwicklungen auf sie anwenden lassen. Nach Nr. 86. pag. 63 wird aus 4.

$$6.\quad w = \frac{m^{r|-1}.\Delta^r n^p}{1^{r|1}(m+n)^p}$$

$$= \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\left[\left(\frac{n+r}{m+n}\right)^p - \frac{r}{1}\left(\frac{n+r-1}{m+n}\right)^p + \frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{n+r-2}{m+n}\right)^p - \dots (-1)^r\left(\frac{n}{m+n}\right)^p\right].$$

Nach Nr. 89. pag. 65 der Combinationslehre geht 4. in

$$7.\quad w = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}(m+n)^p}\left[\frac{p^{r|-1}n^{p-r}}{1^{r|1}} + \frac{p^{r+1|-1}.n^{p-r-1}}{1^{2|1}1^{r-1|1}} + \frac{3r+1}{4}.\frac{p^{r+2|-1}.n^{p-r-2}}{1^{3|1}1^{r-1|1}} + \dots\right]$$

über. Die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen alle weifse Kugeln erscheinen werden, ist aus 6. und 5.

$$8.\quad w = 1 - \frac{m}{1}\left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m+n-2}{m+n}\right)^p - \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{m+n-3}{m+n}\right)^p + \dots$$

Die Glieder der Reihen 6. und 8. convergiren stark, wenn p einigermafsen grofs ist. Bei Ermittlung der zugehörigen Zahlenwerthe lassen sich die in §. 29. der Combinationslehre angegebenen Methoden anwenden. Für nicht sehr genaue Näherungswerthe kann man sich auch folgender Verfahren bedienen.

Es wird ohne bedeutenden Fehler in der Formel 8. $\left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^{2p}$ statt $\left(\frac{m+n-2}{m+n}\right)^p$, $\left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^{3p}$ statt $\left(\frac{m+n-3}{m+n}\right)^p$ u. s. w. gesetzt werden können. Durch Einführung dieser Werthe in 8. erhält man annähernd

$$9.\quad w = \left[1 - \left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^p\right]^m.$$

Hieraus folgt, dafs der Werth von w wächst, wenn p wächst, und dafs bei hinlänglich grofsem p der Werth von w der Gewifsheit ganz nahe kommt; wie dies bei immer weiterer Fortsetzung der Ziehungen stattfinden mufs. Die Gleichung 9. giebt daher die Möglichkeit, annäherungsweise die Zahl der Ziehungen zu bestimmen, die nöthig sind, um mit irgend einem Grade der Wahrscheinlichkeit alle weifse Kugeln erscheinen zu sehen. Es ist, nach einer einfachen Entwicklung:

$$10.\quad p = \frac{\log(1-\sqrt{w})}{\log\frac{m+n-1}{m+n}}.$$

Eben so läfst sich die Zahl der weifsen Kugeln annäherungsweise bestimmen, die man in die Urne bringen mufs, um einen bestimmten Grad der Wahrscheinlichkeit zu haben, dafs bei einer Gesammtzahl von Kugeln (s) alle weifse Kugeln in p Ziehungen erscheinen werden. Setzt man zu dem Ende $s = m+n$, so entsteht aus 9.

$$11.\quad m = \frac{\log w}{\log\left[1-\left(\frac{s-1}{s}\right)^p\right]}.$$

Sind demnach in einer Urne 100 weifse und 100 schwarze Kugeln enthalten, so mufs man nach 10. 989,6 Ziehungen machen, um 1 gegen 1 wetten zu können, dafs unter obigen Bedingungen keine weifse Kugeln mehr in der Urne zurück sein werden. Befinden sich 10 weifse und 10 schwarze Kugeln in der Urne, so sind zu dem nämlichen Zweck 52,4 Ziehungen nöthig.

Die Art, wie *Laplace* dieses Problem behandelt, sieht man No. 17. pag. 284 seiner *Théor. analyt. des probab. 3e éd. Par. 1820.*

§. 9.

In einer Urne sind m weifse und n schwarze Kugeln enthalten. Es wird $p$mal gezogen und bei jeder Ziehung eine Kugel herausgenommen. So oft eine weifse oder eine schwarze Kugel erscheint, wird sie zurück- und eine schwarze mit ihr in die Urne geworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen r weifse Kugeln erscheinen werden?

Die Anzahl der Kugeln ändert sich mit jeder Ziehung und wächst um die Einheit. Die Kugelmengen sind daher, nach der Reihenfolge der Ziehungen, $m+n$, $m+n+1$, $m+n+2$, $m+n+3$, ... $m+n+p-1$. Die Zahl der weifsen Kugeln bleibt ungeändert; die der schwarzen aber wächst gleichfalls mit jeder Ziehung um die Einheit, und ist der Reihe nach n, $n+1$, $n+2$, ... $n+p-1$. Demnach werden auch die Wahrscheinlichkeiten, in den verschiedenen Ziehungen eine weifse oder eine schwarze Kugel zu ziehen, veränderlich sein und von der in der Urne befindlichen Kugel-Anzahl abhängen. Die Wahrscheinlichkeiten, eine schwarze Kugel in der ersten, zweiten, dritten u. s. w., $p$ten Ziehung zu erhalten, werden der Reihe nach

$$1.\quad \frac{n}{m+n},\ \frac{n+1}{m+n+1},\ \frac{n+2}{m+n+2},\ \frac{n+3}{m+n+3},\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1}$$

sein. Die Wahrscheinlichkeiten, eine weifse Kugel zu erhalten, werden sein:

$$2.\quad \frac{m}{m+n},\ \frac{m}{m+n+1},\ \frac{m}{m+n+2},\ \frac{m}{m+n+3},\ \ldots\ \frac{m}{m+n+p-1}.$$

Wir erwägen zuerst die Frage: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen gerade eine weifse Kugel erscheinen werde?

Die weifse Kugel kann entweder gerade in der ersten oder in der zweiten, dritten u. s. w., oder in der letzten Ziehung erscheinen. In jeder der übrigen Ziehungen darf sofort nur eine schwarze Kugel erscheinen. Führen wir nun die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus den Formeln 1. und 2. ein, so erhalten wir folgende Zusammenstellung für die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} w = &\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1},\\ +&\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1},\\ +&\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{m}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1},\\ +&\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{m}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +&\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-2}{m+n+p-2}\cdot\frac{m}{m+n+p-1}. \end{aligned}$$

Wird der allen Gliedern gemeinschaftliche Factor $\frac{m}{(m+n)^{p|1}}$ ausgeschieden, so bilden die zurückbleibenden Ausdrücke die Summen der Producte aus den Verbindungen ohne Wiederholungen zur $(p-1)$ten Classe der Elemente n, $n+1$, $n+3$, ... $n+p-1$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich dann folgender Ausdruck:

$$3.\quad w = \frac{m}{(m+n)^{p|1}}\,SC(n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots\ n+p-1)^{p-1}.$$

Untersuchen wir nun die Wahrscheinlichkeit, gerade zwei weifse Kugeln in p Ziehungen zu erlangen, so ergiebt sich das nämliche Schema, welches der Gleichung 3. im vorigen Paragraph vorausgeschickt wurde. Wenden wir dieses Schema auf die Formeln 1. und 2. an, so erhalten wir folgende Zusammenstellung für die fragliche Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n+1} \cdot \frac{n+2}{m+n+2} \cdot \frac{n+3}{m+n+3} + \ldots \frac{n+p-1}{m+n+p-1},$$
$$+ \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n+1}{m+n+1} \cdot \frac{m}{m+n+2} \cdot \frac{n+3}{m+n+3} + \ldots \frac{n+p-1}{m+n+p-1},$$
$$+ \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n+1}{m+n+1} \cdot \frac{n+2}{m+n+2} \cdot \frac{m}{m+n+3} + \ldots \frac{n+p-1}{m+n+p-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n+1}{m+n+1} \cdot \frac{n+2}{m+n+2} \cdot \frac{n+3}{m+n+3} + \ldots \frac{m}{m+n+p-2} \cdot \frac{m}{m+n+p-1}.$$

Die Ausscheidung des gemeinschaftlichen Factors aus sämmtlichen Gliedern dieser Formel erzeugt Gebilde, welche die Summen der Producte aus den Verbindungen ohne Wiederholungen zur $(p-2)$ten Classe der Elemente $n, n+1, n+2, n+3, \ldots n+p-1$ sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach für den vorliegenden Fall

$$4. \quad w = \frac{m^2}{(m+n)^{p|1}} SC(n, n+1, n+2, n+3, \ldots n+p-1)^{p-2}.$$

Wir werden hierdurch auf ein leicht erkennbares allgemeines Gesetz geführt. Die Wahrscheinlichkeit des in Frage stehenden allgemeinen Problems wird durch folgende Gleichung angegeben:

$$5. \quad w = \frac{m^r}{(m+n)^{p|1}} SC(n, n+1, n+2, \ldots n+p-1)^{p-r},$$

oder, wenn wir die Formel **70.** §. **26.** der Combinationslehre benutzen,

$$6. \quad w = \frac{m^r \partial^r n^{p|1}}{(m+n)^{p|1} 1^{r|1} (\partial n)^r}.$$

Benutzt man aber die Gleichung **73.** §. **26.** der Combinationslehre, so ergiebt sich

$$7. \quad w = \frac{m^r}{(m+n)^{p|1} . 1^{r|1}} [p^{r|-1} n^{p-r} + (p-1)^{r|-1} SC^1 n^{p-r-1} + (p-2)^{r|-1} SC^2 n^{p-r-2} + \ldots]$$
$$(1, 2, 3, 4, \ldots p-1).$$

Hier bedeuten SC^1, SC^2, SC^3, ... die Productensummen der Verbindungen ohne Wiederholungen zu der ersten, zweiten, dritten Classe u. s. w. der untergeschriebenen Elemente. Endlich erhalten wir aus **77.** §. **27.** der Combinationslehre folgenden Ausdruck für **5.**:

$$8. \quad w = \frac{m^r}{1^{r|1}} \cdot \frac{[\log(1+\Delta)]^r n^{p|1}}{(m+n)^{p|1}}.$$

Für diese Gleichung sind die Entwicklungen von **80.** pag. **54** der Combinationslehre zu berücksichtigen.

§. 10.

In einer Urne sind n, mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel grade in derjenigen Ziehung erscheinen werde, welche durch die ihr aufgeschriebene Zahl angezeigt ist?

Man sieht leicht, dafs die Zahl der günstigen Kugelgruppen mit der Anzahl der Stellen-Elemente übereinstimmt, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen von n Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden. Diese Anzahl ist in 134. §. 43. der Combinationslehre angegeben. Wird sie durch die Zahl aller möglichen Kugelgruppen $n^{p|-1}$ gemessen, so ergiebt sich folgender Werth für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$1.\quad w = \frac{p}{n} - \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}n^{2|-1}} + \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}n^{3|-1}} - \frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}n^{4|-1}} + \dots$$

Werden unter den genannten Bedingungen alle Kugeln gezogen, so geht p in n über und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist aus 1.:

$$2.\quad w = 1 - \frac{1}{1^{2|1}} + \frac{1}{1^{3|1}} - \frac{1}{1^{4|1}} + \dots (-)^{n-1}\frac{1}{1^{n|1}}.$$

Bedeutet n eine etwas grofse Zahl, so geht 2. in folgende Gleichung über:

$$3.\quad w = 1 - e^{-1} = 0{,}6321205\dots$$

Hier ist e die Zahl, deren natürlicher Logarithme die Einheit ist. Die Wahrscheinlichkeit, dafs keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werde, ist aus 2., wenn alle Kugeln gezogen werden,

$$4.\quad w = \frac{1}{1^{2|1}} - \frac{1}{1^{3|1}} + \frac{1}{1^{4|1}} - \frac{1}{1^{5|1}} + \dots (-)^{n}\frac{1}{1^{n|1}}.$$

Für ein nicht zu kleines n wird hieraus

$$5.\quad w = e^{-1} = 0{,}3678794\dots$$

Die Gleichungen 3. und 5. gelten schon, wenn die Zahl der in der Urne befindlichen Kugeln 20 und mehr beträgt.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade r Kugeln, nicht mehr, und nicht weniger, in der Ziehungsreihe mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werden?

Die Zahl der günstigen Gruppen leitet sich aus der Gleichung 142. §. 44. der Combinationslehre ab, wenn dort p statt q gesetzt wird. Wird durch die Zahl aller möglichen Kugelgruppen getheilt, so findet sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$6.\quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}n^{p|-1}}\Big[(n-r)^{p-r|-1} - \frac{p-r}{1}(n-r-1)^{p-r-1|-1} + \frac{(p-r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(n-r+2)^{p-r-2|-1} - \ldots\Big].$$

Durch Weglassung der gleichen Factoren erhält man

$$7.\quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}n^{r|-1}}\Big[1 - \Big(\frac{p-r}{n-r}\Big)^{1|-1} + \frac{1}{1^{2|1}}\Big(\frac{p-r}{n-r}\Big)^{2|-1} - \frac{1}{1^{3|1}}\Big(\frac{p-r}{n-r}\Big)^{3|-1} + \ldots\Big].$$

Werden alle Kugeln gezogen, so ist $p=n$ und es wird hieraus

$$8.\quad w = \frac{1}{1^{r|1}}\Big[1 - 1 + \frac{1}{1^{2|1}} - \frac{1}{1^{3|1}} + \frac{1}{1^{4|1}} - \ldots (-)^{n-r-1}\frac{1}{1^{n-r|1}}\Big].$$

Ist $(n-r)$ nicht zu klein, so hat man

$$9.\quad w = \frac{1}{1^{r|1}c}.$$

Die Gleichung 6. dient, folgende Frage zu beantworten.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit den ihnen aufgeschriebenen Zahlen in p Ziehungen zusammentreffen werden?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit bestimmt sich, wenn wir aus 6. die Wahrscheinlichkeit abnehmen, dafs gerade r, $r+1$, $r+2$, ... $p-1$, p Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden. Setzen wir allmälig die genannten Werthe in 6., so erhalten wir Folgendes, nach etwas veränderter Darstellung:

$$\begin{aligned}
w = {} & \frac{1}{n^{p|-1}}\Big[\frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}(n-r)^{p-r|-1} - \frac{p^{r+1|-1}}{1^{r|1}.1}(n-r-1)^{p-r-1|-1} + \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r|1}.1^{2|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1} - \ldots\Big] \\
& + \frac{1}{n^{p|-1}}\Big[\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}}(n-r-1)^{p-r-1|-1} - \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+1|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1} + \frac{p^{r+3|-1}}{1^{r+1|1}.1^{2|1}}(n-r-3)^{p-r-3|-1} - \ldots\Big] \\
& + \frac{1}{n^{p|-1}}\Big[\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1} - \frac{p^{r+3|-1}}{1^{r+2|1}.1}(n-r-3)^{p-r-3|-1} + \frac{p^{r+4|-1}}{1^{r+2|1}.1^{2|1}}(n-r-4)^{p-r-4|-1} - \ldots\Big] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{n^{p|-1}}\Big[\frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}(n-p+1)^{1|-1} - \frac{p^{p|-1}}{1^{p-1|1}}(n-p)^{0|-1}\Big] \\
& + \frac{1}{n^{p|-1}}\cdot\frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}}.
\end{aligned}$$

Sämmtliche Glieder dieses Ausdrucks sind mit der Facultät $\frac{1}{n^{p|-1}}$ verbunden. Lassen wir dieselbe vorerst unberücksichtigt und beachten die in den Klammern eingeschlossenen Reihen, so lassen sich dieselben in schiefliegender Richtung zusammenzählen. Dabei ist nur nöthig, die begleiten-

den Facultäten von p zu gleichen Dimensionen zu ergänzen. Dies giebt folgende Umformungen:

$$\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}}(n-r-1)^{p-r-1|-1}\left[1-\frac{r+1}{1}\right] = -\frac{r}{1}\cdot\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}}(n-r-1)^{p-r-1|-1},$$

$$\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1}\left[1-\frac{r+2}{1}+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\right]$$
$$= \frac{r(r+1)}{1.2}\cdot\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1},$$

$$\frac{p^{r+3|-1}}{1^{r+3|1}}(n-r-3)^{p-r-3|-1}\left[1-\frac{r+3}{1}+\frac{(r+2)(r+3)}{1.2}-\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}\right]$$
$$= -\frac{r^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{p^{r+3|-1}}{1^{r+3|1}}(n-r-3)^{p-r-3|-1}$$

u. s. w. Die in Klammern eingeschlossenen Facultäten von r unterliegen folgendem Gesetze:

$$1-\frac{r+s}{1}+\frac{(r+s)^{2|-1}}{1^{2|1}}-\frac{(r+s)^{3|-1}}{1^{3|1}}+\ldots(-)^{x}\frac{(r+s)^{x|-1}}{1^{x|1}} = (-)^{x}\frac{(r+s-1)^{x|-1}}{1^{x|1}}.$$

Daraus erhalten wir folgenden Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$10.\quad w = \frac{1}{n^{p}}\left[\frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}(n-r)^{p-r|-1}-\frac{r}{1}\cdot\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}}(n-r-1)^{p-r-1|-1}\right.$$
$$\left.+\frac{r^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1}-\ldots\right],$$

oder in anderer Darstellung:

$$11.\quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}.n^{r|-1}}\left[1-\frac{r}{r+1}\cdot\frac{p-r}{n-r}+\frac{r}{1^{2|1}(r+2)}\left(\frac{p-r}{n-r}\right)^{2|-1}\right.$$
$$\left.-\frac{r}{1^{3|1}(r+3)}\left(\frac{p-r}{n-r}\right)^{3|-1}+\ldots\right].$$

Werden alle Kugeln gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit den ihnen aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden,

$$12.\quad w = \frac{1}{1^{r-1|1}}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}+\frac{1}{1.2(r+2)}-\frac{1}{1.2.3(r+3)}+\ldots\right].$$

Nun läfst sich auch die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dafs höchstens r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen in p Ziehungen zusammentreffen werden. Zu dem Ende ist 11. von der Einheit abzuziehen und dann $(r+1)$ statt r zu setzen. Dies giebt

$$13.\quad w = 1-\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}.n^{r+1|-1}}\left[1-\frac{r+1}{r+2}\cdot\frac{p-r-1}{n-r-1}+\frac{(r+1)}{1^{2|1}(r+3)}\left(\frac{p-r-1}{n-r-1}\right)^{2|1}\right.$$
$$\left.-\frac{(r+1)}{1^{3|1}(r+3)}\left(\frac{p-r-1}{n-r-1}\right)^{3|-1}+\ldots\right].$$

Endlich leitet sich auch aus 11. die Wahrscheinlichkeit ab, dafs in p Ziehungen wenigstens r, und höchstens s Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden. Die Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit beruht nämlich darauf, dafs entweder gerade r, oder $r+1$, oder $r+2$, ..., oder s Kugeln mit ihren Zahlen zusammentreffen. Es ist demnach in 11. $s+1$ statt r zu setzen und das erhaltene Resultat von 11. abzuziehen. Dies giebt

$$14. \quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1} n^{r|-1}} \left[1 - \frac{r}{r+1} \cdot \frac{p-r}{n-r} + \frac{r}{1^{2|1}(r+2)} \left(\frac{p-r}{n-r}\right)^{2|-1} - \frac{r}{1^{3|1}(r+3)} \left(\frac{p-r}{n-r}\right)^{3|-1} + \ldots\right]$$
$$- \frac{p^{s+1|-1}}{1^{s+1|1} \cdot n^{s+1|-1}} \left[1 - \frac{s+1}{s+2} \cdot \frac{p-s-1}{n-s-1} + \frac{s+1}{1^{2|1}(s+3)} \left(\frac{p-s-1}{n-s-1}\right)^{2|-1} - \frac{s+1}{1^{3|1}(s+4)} \left(\frac{p-s-1}{n-s-1}\right)^{3|-1} + \ldots\right].$$

§. 11.

In einer Urne sind m Arten von Kugeln enthalten. Jede Art enthält gleich viele Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnet sind. Es werden p Kugeln einzeln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel mit ihrer aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde?

Die günstigen Kugelgruppen kommen mit den Stellen-Elementen überein, die entstehen, wenn die Versetzungen aus m gleich grofsen Elementenreihen zur $p$ten Classe gebildet werden. Diese Zahl ist in **146. §. 45.** der Combinationslehre angegeben. Man hat dort p statt q und m statt p zu setzen. Wird durch die Zahl aller möglichen Kugelgruppen gemessen, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgender Ausdruck:

$$1. \quad w = \frac{mp}{mn} - \frac{m^2 p^{2|-1}}{1^{2|1}(mn)^{2|-1}} + \frac{m^3 p^{3|-1}}{1^{3|1}(mn)^{3|-1}} - \frac{m^4 p^{4|-1}}{1^{4|1}(mn)^{4|-1}} + \ldots.$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied negativ werden oder in 0 übergehen sollte. Werden n Ziehungen gemacht, so wird $p = n$ und es ist

$$2. \quad w = 1 - \frac{m^2}{1^{2|1}} \left(\frac{n}{mn}\right)^{2|-1} + \frac{m^3}{1^{3|1}} \left(\frac{n}{mn}\right)^{3|-1} - \frac{m^4}{1^{4|1}} \left(\frac{n}{mn}\right)^{4|-1} + \ldots.$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für die erste Ziehungsreihe, sondern auch nach §. 7. für jede spätere Reihe, worin n Ziehungen gemacht werden; vorausgesetzt, dafs die Beschaffenheit der gezogenen Kugeln nicht bekannt ist.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen gerade r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden?

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich aus 151. §. 46. der Combinationslehre. Sie ist

$$3.\quad w = \frac{p^{r|-1} m^r}{1^{r|1}(mn)^{r|-1}}\left[1 - \frac{m}{1}\left(\frac{p-r}{m-r}\right)^{1|-1} + \frac{m^2}{1^{2|1}}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{2|-1} - \frac{m^3}{1^{3|1}}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{3|-1} + \ldots\right].$$

Mit Hülfe dieser Gleichung sind wir im Stande folgende Frage zu beantworten. Wie grofs ist unter den genannten Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden?

Wenden wir das nämliche Verfahren an, welches in §. 10. zu der Gleichung 10. führte, so ergiebt sich folgende Bestimmung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Man findet

$$4.\quad w = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\left(\frac{p}{mn}\right)^{r|-1}\left[1 - \frac{rm}{r+1}\cdot\frac{p-r}{mr-r} + \frac{rm^2}{1^{2|1}(r+2)}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{2|-1} - \frac{rm^3}{1^{3|1}(r+3)}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{3|-1} + \ldots\right].$$

Auf gleiche Weise wie in §. 10. ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, dafs höchstens r, also entweder r, oder $r-1$, oder $r-2$, ... oder 1, oder keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werde:

$$5.\quad w = 1 - \frac{m^{r+1}}{1^{r+1|1}}\left(\frac{p}{mn}\right)^{r+1|-1}\left[1 - \frac{(r+1)m}{r+2}\left(\frac{p-r-1}{mn-r-1}\right) + \frac{(r+1)m^2}{1^{2|1}(r+3)}\cdot\left(\frac{p-r-1}{mn-r-1}\right)^{2|-1} - \frac{(r+1)m^3}{1^{3|1}(r+4)}\cdot\left(\frac{p-r-1}{mn-r-1}\right)^{3|-1} + \ldots\right].$$

Aus 4. ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den genannten Bedingungen wenigstens r und höchstens s Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen in p Ziehungen zusammentreffen werden. Sie ist

$$6.\quad w = \frac{m^r}{1^{r|1}}\left(\frac{p}{mn}\right)^{r|-1}\left[1 - \frac{rm}{r+1}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right) + \frac{rm^2}{1^{2|1}(r+2)}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{2|-1} - \ldots\right] - \frac{m^{s+1}}{1^{s+1|-1}}\left(\frac{p}{mn}\right)^{s+1|-1}\left[1 - \frac{(s+1)m}{s+2}\left(\frac{p-s-1}{mn-s-1}\right) + \frac{m^2(s+1)}{1^{2|1}(s+3)}\left(\frac{p-s-1}{mn-s-1}\right)^{2|-1} - \ldots\right] {}^{*}).$$

---

*) In diesem und dem vorhergehenden Paragraph haben wir der Kürze wegen $\left(\frac{a}{b}\right)^{x|-1}$ statt $\frac{a^{x|-1}}{b^{x|-1}} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-x+1)}{b(b-1)(b-2)\ldots(b-x+1)}$ geschrieben, und werden auch künftig diese Beziehungsart beibehalten.

Die in diesem Paragraph gefundenen Gleichungen lassen sich auf sehr einfache Ausdrücke bringen, wenn sehr grofse Zahlen vorkommen und die *näherungsweise* Werthbestimmung genügt. In diesen Fällen können die Gleichungen aus der Combinationslehre pag. 112 u. ff. angewendet werden.

Wird in der Gleichung 2. für n eine etwas grofse Zahl angenommen, so können statt der Facultäten von n und mn ohne bedeutenden Fehler die entsprechenden Potenzen gesetzt werden und die Gleichung geht in folgende über:

$$7. \quad w = 1 - \frac{1}{1^{2|1}} + \frac{1}{1^{3|1}} - \frac{1}{1^{4|1}} - \ldots = 1 - e^{-1}.$$

Wenden wir die nämliche Bemerkung auf die Gleichungen 3. und 4. an, so ergiebt sich, dafs sich die Wahrscheinlichkeiten der in diesem Paragraph betrachteten Fälle denen des vorhergehenden Paragraphen nähern; und das um so mehr, je gröfser n wird. Die Werthe der Wahrscheinlichkeiten werden im Allgemeinen um so kleiner sein, je kleiner die Zahl der Ziehungen ist und je weniger Kugel-Arten bei einerlei n vorkommen; sie werden um so gröfser sein, je gröfser die Anzahl der Ziehungen ist und je mehr Kugel-Arten bei einerlei n vorkommen. Die Wahrscheinlichkeiten, welche bei mehreren Kugel-Arten in Frage stehen, werden sich denen, bei einer Kugel-Art um so mehr nähern, je gröfser die Zahl der Kugeln, welche in jeder Art vorkommen, im Verhältnifs zu der Zahl der Kugel-Arten ist, oder je gröfser n im Verhältnifs zu m ist.

Bei den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten treten die umgekehrten Verhältnisse ein. Die Werthe 3. und 5. §. 7. bilden demnach die Grenzen, um welche die Wahrscheinlichkeiten schwanken und von welchen sie sich mehr oder weniger entfernen.

Zieht man nun aus einer Urne, welche vier Kugel-Arten enthält, von denen die Kugeln jeder Art mit den Zahlen 1, 2, 3, ... 8 bezeichnet sind, acht Kugeln einzeln heraus, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine mit der aufgeschriebenen Nummer zusammentreffen werde, nach 2.:

$$w = 1 - \frac{4^2 . 8^{2|-1}}{1^{2|1} . 32^{2|-1}} + \frac{4^3 . 8^{3|-1}}{1^{3|1} . 32^{3|-1}} - \ldots = 0,650258 \ldots$$

Werden aus einer Urne, die nur acht, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... 8 bezeichnete Kugeln enthält, alle einzeln herausgenommen, so ist die Wahr-

scheinlichkeit, die aufgeschriebene Nummer einer Kugel mit der Ordnungszahl der Ziehung übereinstimmen zu sehen,

$$w = 1 - \frac{1}{1^{2|1}} + \frac{1}{1^{3|1}} - \frac{1}{1^{4|1}} - \ldots \frac{1}{1^{8|1}} = 0{,}632118055\ldots$$

Merkwürdig ist es, dafs die Werthe der Wahrscheinlichkeiten bei zunehmender Kugelzahl, und bei gleichförmig zunehmender Zahl der Ziehungen, nicht regelmäfsig steigen oder fallen, sondern um die in §. 10. 3. und 5. angegebenen Grenzwerthe hin und her schwanken, und regelmäfsig, abwechselnd, bald gröfser, bald kleiner als diese Werthe sind. Werden nämlich aus einer Urne, die 1, oder 2, oder 3, oder 4 Kugeln von einer Art u. s. w. enthält, jedesmal alle gezogen, so sind die Wahrscheinlichkeiten, dafs wenigstens eine mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werde,

$$8.\quad w_1 = 1,\quad w_2 = \tfrac{1}{2},\quad w_3 = \tfrac{2}{3},\quad w_4 = \tfrac{5}{8},\quad w_5 = \tfrac{19}{30},\quad w_6 = \tfrac{91}{144},\ \ldots$$

Für die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten verhält es sich auf entgegengesetzte Weise; nemlich es ist

$$9.\quad w_1 = 0,\quad w_2 = \tfrac{1}{2},\quad w_3 = \tfrac{1}{3},\quad w_4 = \tfrac{3}{8},\quad w_5 = \tfrac{11}{30},\quad w_6 = \tfrac{53}{144},\ \ldots$$

Dies scheint *Laplace* übersehen zu haben, wenn er pag. 223. *Théor analyt. d. probab.* behauptet, dafs in 9. die Wahrscheinlichkeiten wachsen, wenn n wächst. Die Prämissen, worauf er seine Schlüsse gründete, scheinen für den Fall, welchen er behandelte, und für welchen er Schlüsse ziehen wollte, nicht zulässig. Bei unveränderlichem m und n wachsen in der Gleichung 1. dieses Paragraphen und in 1. §. 10. die Werthe der Wahrscheinlichkeiten, wenn p wächst.

Das vorliegende Problem hat *Laplace* in seinem eben angeführten Werke Nr. 9. behandelt. Er hat die Gleichungen 1. und 3. entwickelt. Das Problem in 10. hat *Euler* in *Hist. de l'Académie roy. d. sciences et bell. lett. 1752. pag. 255* u. ff. behandelt. Er hat die Gleichungen 2. 3. und 5. entwickelt und auf mehrere besondere Fälle angewendet. Seine Entwicklungsart ist etwas weitläufig. Auf Seite 270 geht *Euler* von der unrichtigen Ansicht aus, dafs sich die in §. 10. entwickelten Gleichungen auf die in diesem Paragraph behandelten Fälle anwenden liefsen.

Heben wir in den Ausdrücken 4. 5. und 6. die Zähler heraus, so beantworten sie Probleme aus der Combinationslehre. Im ersten Fall

wird die Anzahl der Gruppen bestimmt, in welchen wenigstens r Elemente auf der zugehörigen Stelle erscheinen, wenn die Versetzungen ohne Wiederholungen aus m Elementenreihen zur $p$ten Classe gebildet werden, von denen jede n Elemente hat. Behalten wir die in der Combinationslehre angenommene Bezeichnungsweise bei, so ist

$$10.\quad S+[r, r+1, r+2, \ldots p;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n; \ldots m_1, m_2, \ldots m_n]^p$$
$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} m^r (mn-r)^{p-r|-1} - \frac{r}{1} \cdot \frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} m^{r+1} (mn-r-1)^{p-r-1|-1}$$
$$+ \left(\frac{r}{1}\right)^{2|1} \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} m^{r+2} (mn-r-2)^{p-r-2|-1} - \ldots$$

Im zweiten Falle wird unter den nämlichen Bedingungen die Zahl der Gruppen bestimmt, die höchstens r Elemente an der zugehörigen Stelle haben. Es ist

$$11.\quad S+[0, 1, 2, \ldots r;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n; \ldots m_1, m_2, \ldots m_n]^p$$
$$= (mn)^{p|p-1} - \frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} m^{r+1} (mn-r-1)^{p-r-1|-1}$$
$$+ \frac{r+1}{1} \cdot \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} m^{r+2} (mn-r-2)^{p-r-2|-1} - \ldots$$

Im dritten Falle wird die Zahl der Gruppen bestimmt, in welchen unter den genannten Bedingungen wenigstens r und höchstens s Elemente auf der zugehörigen Stelle erscheinen. Sie ist

$$12.\quad S+[r, r+1, \ldots s;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n; \ldots m_1, m_2, \ldots m_n]^p$$
$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} m^r (mn-r)^{p-r} - \frac{r}{1} \cdot \frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} m^{r+1} (mn-r-1)^{p-r-1|-1}$$
$$+ \left(\frac{r}{1}\right)^{2|1} \cdot \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} m^{r+2} (mn-r-2)^{p-r-2|-1} - \ldots$$
$$- \frac{p^{s+1|-1}}{1^{s+1|1}} m^{s+1} (mn-s-1)^{p-s-1|-1} + \frac{s+1}{1} \cdot \frac{p^{s+2|-1}}{1^{s+2|1}} m^{s+2} (mn-s-2)^{p-s-2|-1}$$
$$- \left(\frac{s+1}{1}\right)^{2|1} \frac{p^{s+3|-1}}{1^{s+3|1}} m^{s+3} (mn-s-3)^{p-s-3|-1} + \ldots$$

Soll die Zahl der Stellen-Elemente für die vorliegenden Probleme bestimmt werden, wenn nur eine Elementenreihe vorhanden ist, so ergiebt sie sich leicht, wenn in den eben gefundenen Formeln $m = 1$ gesetzt wird. Die Gleichungen 10. 11. und 12. beantworten die Probleme, worauf §. 44. und 46. der Combinationslehre aufmerksam machen.

§. 12.

In einer Urne sind m, in einer andern n Kugeln enthalten. Aus jeder wird eine willkürliche Anzahl von Kugeln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus jeder Urne gerade p Kugeln gezogen werden?

Aus der Urne, welche m Kugeln enthält, können $\frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}$ Gruppen genommen werden, von denen jede p Kugeln enthält. Aus der zweiten können $\frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}$ solcher Gruppen hervorgehen. Jede einzelne Kugelgruppe, die aus der ersten Urne gezogen wird, kann sich mit allen, die aus der Urne gezogen werden, der Reihe nach verbinden und der Aufgabe genügen. Die Zahl der günstigen Fälle ist daher

$$1.\quad A = \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Die Kugelgruppen, welche aus der ersten Urne, die m Kugeln enthält, hervorgehen können, werden entweder eine, oder zwei, oder drei u. s. w., oder m Kugeln zählen. Die Bestimmung der, sämmtlichen Fällen zugehörigen Gruppen-Anzahlen führt zu folgendem Ausdruck:

$$A_1 = \frac{m}{1} + \frac{m^{2|-1}}{2^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} = (1+1)^m - 1.$$

Eben so ergiebt sich für die Zahl aller möglichen Kugelgruppen, die aus der zweiten Urne hervorgehen können:

$$A_2 = \frac{n}{1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} = (1+1)^n - 1.$$

Sämmtliche in A_1 und A_2 enthaltene Kugelgruppen können sich miteinander verbinden. Die Zahl aller möglichen Fälle ist daher

$$2.\quad A_{m+n} = (2^m - 1)(2^n - 1).$$

Aus 1. und 2. ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$3.\quad w = \frac{m^{p|-1} n^{p|-1}}{1^{p|1} . 1^{p|1} (2^m - 1)(2^n - 1)}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus beiden Urnen gleichzeitig gleichviel Kugeln gezogen werden?

Die günstigen Fälle sind folgende. Es werden entweder eine, oder zwei, oder drei u. s. w., oder n Kugeln gleichzeitig aus beiden Urnen ge-

zogen, wobei n kleiner als m angenommen wird. Die Zahl der günstigen Fälle ist nach den vorstehenden Erörterungen zu No. 1.:

$$A = \frac{n}{1}\cdot\frac{m}{1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}\cdot\frac{m^{n|-1}}{1^{n|1}}.$$

Wenden wir auf diesen Ausdruck die in §. 142. und 143. pag. 257 u. ff. m. Differenzencalculs gemachten Bemerkungen an, so geht die Zahl in folgende über:

$$A = \frac{(m+n)^{n|-1}}{1^{n|1}} - 1.$$

Wird dieser Ausdruck durch die Zahl aller möglichen Fälle nach 2. gemessen, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$4.\qquad w = \frac{(m+n)^{n|-1}}{1^{n|1}(2^m-1)(2^n-1)} - \frac{1}{(2^m-1)(2^n-1)}.$$

Ist die Kugel-Anzahl in beiden Urnen gleich, also $n=m$, so ergiebt sich hieraus

$$5.\qquad w = \frac{(2m)^{2m|-1}}{1^{m|1}1^{m|1}(2^m-1)^2} - \frac{1}{(2^m-1)^2}.$$

Ist die Kugel-Anzahl in beiden Urnen sehr grofs, so erhalten wir nach §. 143. pag. 259 des Differenzencalculs

$$6.\qquad w = \frac{1.3.5.7\dots(2m-1)}{2.4.6.8\dots 2m}.$$

Da nun bekanntlich bei sehr grofsem m, näherungsweise

$$\tfrac{1}{2}\pi \doteq \frac{2.2.4.4.6.6\dots 2m.2m}{1.3.3.5.5.7\dots(2m-1)(2m+1)}$$

ist, so ergiebt sich hieraus leicht folgende Gleichung:

$$w = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}\pi(2m+1))}},$$

oder, da bei sehr grofsem m, $2m$ statt $2mn$ gesetzt werden kann,

$$7.\qquad w = \frac{1}{\sqrt{(\pi m)}}.$$

π ist das Verhältnifs des Durchmessers zur Peripherie des Kreises. Aus 7. folgt, dafs die gesuchte Wahrscheinlichkeit sich verkleinert, je gröfser die Zahl der Kugeln wird.

Erheben zwei Personen gleichzeitig und auf's Gerathewohl 1, 2, 3, oder 4 Finger, so ist nach 4. die Wahrscheinlichkeit, dafs beide die gleiche Zahl treffen werden, $\frac{69}{225} = 0{,}30622 \ldots$, also beinahe $\frac{1}{3}$.

Von zwei Urnen enthält jede m Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnet sind. Man zieht gleichzeitig p Kugeln aus jeder Urne. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die gleichen Zahlen tragen?

Die Zahl der verschiedenen Fälle, in welchen p Kugeln aus der einen Urne genommen werden können, ist

$$8. \quad A = \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Jeder einzelne Fall, der bei dem Ziehen aus der einen Urne möglich ist, kann mit demselben, der bei dem Ziehen aus der andern möglich ist, nur einmal zusammentreffen. Die Zahl aller günstigen Fälle ist demnach unter dem vorstehenden Ausdrucke begriffen. Die Zahl aller möglichen Fälle ergiebt sich aus 1., wenn $n = m$ gesetzt wird. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$9. \quad w = \frac{1^{p|1}}{m^{p|-1}}.$$

Es wird unter den nämlichen Bedingungen gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus beiden Urnen gleich viele und mit den nämlichen Zahlen bezeichnete Kugeln erscheinen werden?

Es können entweder eine, oder zwei, oder drei u. s. w., oder m Kugeln aus jeder Urne gezogen werden, welche die gleichen Zahlen tragen. Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich, wenn 1, 2, 3, ... m in 8. statt p gesetzt wird. Sie ist

$$A = m + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} = 2^m - 1.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle giebt 2., wenn m statt n gesetzt wird. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$10. \quad w = \frac{1}{2^m - 1}.$$

Sind drei Urnen vorhanden, und werden p Kugeln gleichzeitig aus jeder herausgenommen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die gleichen Zahlen tragen werden:

$$w = \frac{1^{p|1} \cdot 1^{p|1}}{m^{p|-1} \cdot m^{p|-1}}.$$

Hieraus ergiebt sich allgemein, wenn r Urnen vorhanden sind, für die Wahrscheinlichkeit, dafs p gleichzeitig aus jeder Urne gezogene Kugeln dieselben Zahlen tragen werden:

$$11. \quad w = \frac{(1^{p|1})^{r-1}}{(m^{p|-1})^{r-1}}.$$

Eben so ergiebt sich allgemein aus 10. für die Wahrscheinlichkeit, dafs überhaupt die gleiche Anzahl gleichbezeichneter Kugeln erscheinen werde, wenn aus r Urnen gezogen und aus jeder willkürlich irgend eine Anzahl Kugeln genommen wird:

$$12. \quad w = \frac{1}{(2^m - 1)^{r-1}}.$$

Es ist nicht eine nothwendige Bedingung, dafs die Anzahlen von Kugeln in den verschiedenen Urnen gleich sind. Sie können auch ungleich sein. Für diesen Fall gehen die Gleichungen 11. und 12. in folgende über:

$$13. \quad w = \frac{(1^{p|1})^{s-1}}{m_2^{p|-1}\, m_3^{p|-1} . m_4^{p|-1} \dots . m_r^{p|-1}},$$

$$14. \quad w = \frac{1}{(2^{m_2'}-1)(2^{m_3}-1)(2^{m_4}-1) \dots . (2^{m_r}-1)},$$

wenn m_1 die kleinste Kugel-Anzahl bedeutet.

In einer Urne sind m Kugeln enthalten. A nimmt irgend eine Anzahl von Kugeln heraus, und B ruft gleichzeitig irgend eine Zahl, die kleiner als $m+1$ ist, aus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs beide die gleiche Zahl getroffen haben werden?

Die Wahrscheinlichkeit beruht darauf, dafs A jede beliebige Zahl von Kugeln, also 1, 2, 3, ... m ziehen kann. Die Zahl der günstigen Fälle ist, nach den zu 2. vorausgeschickten Bemerkungen:

$$A = m + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots . \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} = 2^m - 1.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist aus den nämlichen Gründen $2^m - 1$. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist daher $w = 1$, und wird also zur *Gewifsheit*. Die Wahrscheinlichkeit, dafs B eine bestimmte, unter m möglichen Zahlen treffen werde, ist $\frac{1}{m}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$15. \quad w = \frac{1}{m}.$$

§. 13.

In einer Urne befinden sich m Kugeln. Jemand nimmt aufs Gerathewohl eine Anzahl Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die herausgenommene Anzahl von Kugeln gerade, und wie grofs, dafs sie ungerade sein werde?

Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine gerade Anzahl von Kugeln erscheinen werde, beruht darauf, dafs entweder zwei, vier, oder sechs Kugeln u. s. w. gezogen werden. Die günstigen Fälle sind

$$A_1 = \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} + \frac{m^{6|-1}}{1^{6|1}} + \ldots.$$

Soll eine ungerade Anzahl von Kugeln, also eine, drei, fünf u. s. w. gezogen werden, so ist die Zahl der günstigen Fälle

$$A_2 = \frac{m}{1} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \frac{m^{5|-1}}{1^{5|1}} + \ldots.$$

Nun ist

$$1.\quad 2^m = 1 + m + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots. \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}},$$

$$2.\quad 0 = (1-1)^m = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} - \ldots. (-)^m \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}}.$$

Wird 1. und 2. zusammengezählt, von der erhaltenen Summe die Zahl 2 abgezogen und dann das Resultat durch 2 gemessen, so entsteht

$$3.\quad A_1 = \tfrac{1}{2}\left(2 + 2.\frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + 2.\frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} + \ldots. - 2\right) = \frac{2^m - 2}{2} = 2^m - 1.$$

Wird die Gleichung 2. von 1. abgezogen und das erhaltene Resultat durch 2 gemessen, so ist

$$4.\quad A_2 = \tfrac{1}{2}\left(2m + 2.\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + 2.\frac{m^{5|-1}}{1^{5|1}} + \ldots.\right) = \frac{2^m}{2} = 2^{m-1}.$$

Die Zahl der möglichen Fälle ist nach den Vorbemerkungen zu 2. §. 12. $A = 2^m - 1$. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine gerade Anzahl von Kugeln gezogen werden wird,

$$5.\quad w = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1};$$

die Wahrscheinlichkeit, dafs eine ungerade Anzahl von Kugeln gezogen werden wird, ist

$$6.\quad w = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}.$$

Diese Wahrscheinlichkeiten nähern sich immer mehr der Gleichheit, je grösser m wird, und der Unterschied wird immer unbedeutender. Bei kleinen m ist der Unterschied bedeutender.

In einer Urne sind m schwarze und n weifse Kugeln enthalten. Man nimmt eine gerade Anzahl von Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von jeder Farbe gleich viele Kugeln erscheinen werden?

Dies wird geschehen, wenn eine weifse und eine schwarze, zwei weifse und zwei schwarze Kugeln u. s. w. erscheinen. Die Zahl der günstigen Fälle ist, wie aus den Bemerkungen zu 4. §. 12. erhellet:

$$7.\quad A_1 = m.n + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots = \frac{(m+n)^{n|-1}}{1^{n|1}} - 1.$$

Hier ist $n < m$. Die Zahl aller möglichen Fälle ist

$$8.\quad A_2 = \frac{(m+n)^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{(m+n)^{4|-1}}{1^{4|1}} + \frac{(m+n)^{6|-1}}{1^{6|1}} + \dots = \frac{2^{m+n}-2}{2} = 2^{m+n-1} - 1;$$

wie sich aus 3. ergiebt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$9.\quad w = \frac{(m+n)^{n|-1} - 1}{1^{n|1}(2^{m+n-1} - 1)}.$$

Enthält die Urne gleich viele weifse und schwarze Kugeln, so geht der vorstehende Ausdruck in folgenden über:

$$10.\quad w = \frac{2m(2m-1)(2m-2)\dots 3.2.1}{(1.2.3\dots m)^2(2^{2m-1}-1)} - \frac{1}{2^{2m-1}-1}.$$

Nach den Gleichungen 5. und 6. §. 12. erhalten wir für sehr grofse m:

$$11.\quad w = \frac{2}{\sqrt{(\pi m)}}.$$

Der Werth der gefundenen Wahrscheinlichkeit ist doppelt so grofs als der in 7. §. 12. gefundene.

Es sind die nämlichen Bedingungen wie oben gegeben. Man nimmt nach Willkür eine gerade Zahl von Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von jeder Farbe gleich viele und gleich bezeichnete Kugeln erscheinen werden?

Nach den Bemerkungen zu 10. §. 12. ist die Zahl der günstigen Fälle

$$12.\quad A = m + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots = 2 - 1;$$

die Zahl aller möglichen Fälle ist in Nr. 8. dieses Paragraphen angegeben. Die Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$13.\quad w = \frac{2^m - 1}{2^{m+n-1} - 1}.$$

Für sehr grofse m wird

$$14. \quad w = \frac{1}{2^{n-1}}$$

zu setzen sein.

Die Gleichungen dieses und des vorhergehenden Paragraphs hängen ihrem Inhalte nach zusammen und sind deshalb hier zusammengestellt. Das erste Problem dieses Paragraphs ist nach *Lacroix* (Wahrscheinlichkeits-Rechnung §. 43.) von *Bertrand* und dann von *Laplace* in *Théor. analyt. d. probab. Nr. 5.* behandelt. Dort findet sich aufserdem auch noch die Gleichung 11. dieses Paragraphs entwickelt.

§. 14.

In einer Urne befinden sich m Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m bezeichnet sind. Es wird p mal gezogen und jedesmal eine Kugel herausgenommen, die man nach der Ziehung in die Urne zurückwirft. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summe der auf den gezogenen Kugeln eingezeichneten Zahlen gerade s beträgt?

Die Anzahl der günstigen Fälle kommt, wie leicht zu sehen, mit der Zahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe s aus den Elementen a_1, a_2, a_3, ... a_m zur $p$ten Classe gebildet werden. Diese Gruppen-Anzahl ist in der Combinationslehre §. 20. Nr. 50. Seite 39 angegeben. Wir benutzen jedoch die dort gegebene Entwicklungsweise nicht, sondern wählen zur Auffindung der dem Unternehmen günstigen Gruppen-Anzahl eine andere Methode, die wir in der Schrift „Die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren Elementarreihen. Freiburg, 1840." angegeben haben. Sie beruht auf der Bemerkung, dafs die Entwicklung der Polynomien, die nach den steigenden Potenzen einer Grundgröfse geordnet sind, auf Ausdrücke führen, in welchen die Vorzahlen der erhaltenen Glieder die Gruppen oder die Gruppen-Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu der Summe, welche der Exponent des zugehörigen Gliedes angiebt und zu der Classe bilden, welche die Potenz ausweiset, zu welcher das gegebene Polynomium erhoben werden soll. Bei dieser Entwicklung entstehen die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen, wenn die Glieder des zu entwickelnden Polynomiums mit den Elementen einer oder mehrerer Reihen verbunden sind, nach der Formel

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots a_m x^m)^p = P'(sp; \quad a_1, a_2, \dots a_m)^p x^p$$
$$+ P'(s(p+1); \; a_1, a_2, \dots a_m)^p x^{p+1}$$
$$+ P'(s(p+2); \; a_1, a_2, \dots a_m)^p x^{p+2},$$

oder es entstehen die Gruppen-Anzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen, wenn die Glieder des zu entwickelnden Polynomiums nicht mit den Elementen einer Reihe verbunden sind, folgendem Ausdrucke gemäfs:

$$(x + x^2 + x^3 + \dots x^m)^p = P'[sp]^p x^p + P'[s(p+1)]^p x^{p+1} + P'[s(p+2)^p]^p x^{p+2} \dots$$
$$\dots P'[sz]^p x^z + \dots$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_m),$$

wobei man Elemente der untergeschriebenen Reihe zu suppliren oder die Exponenten der ordnenden Gröfse x als Stellenzahlen der Elemente einer Reihe sich vorzustellen hat.

Kommen mehrere Elementenreihen in Betracht, so ändert dies die Entwicklungsweise nicht, und die Formel

$$[(a_1 + b_1 + c_1)x + (a_2 + b_2 + c_2 + d_2)x^2 + (a_3 + b_3 \dots e_3)x^3 + \dots (a_m + b_m + \dots k_m)x^m]^p$$
$$= P'(sp)^p x^p + P'(s(p+1))^p x^{p+1} + P'(s(p+2)^p x^{p+2} + \dots P(sz)^p x^z + \dots$$
$$(a_1, a_2, \dots a_m; \; b_1, b_2, \dots b_m; \; c_1, c_2, \dots c_m; \; d_2, d_3 \dots d_m; \; e_3, e_4 \dots e_m; \dots k_m)$$

giebt Glieder, deren Vorzahlen die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen in der $p$ten Classe zu den verschiedenen Summen aus den untergeschriebenen Elementenreihen geben. Der Ausdruck

$$(3x + 4x^2 + 5x^3 + \dots kx^m)^p = P'[sp]^p x^p + P'[s(p+1)]^p x^{p+1}$$
$$+ P'[s(p+2)]^p x^{p+2} + \dots$$

giebt Glieder, deren Vorzahlen die Ausdrücke für die Gruppen-Anzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen in der $p$ten Classe zu den verschiedenen Summen aus den oben untergeschriebenen Elementenreihen bilden. Sollten im letztern Falle die Elemente nicht angegeben sein, so sind sie aus den Vorzahlen der nicht entwickelten Darstellung nach den vorliegenden Beziehungen leicht abzuleiten: denn es sind so viele Einheiten irgend einer Potenz der ordnenden Gröfse vorzuschreiben, als Elemente mit ihr verbunden werden würden, wenn die ursprüngliche Darstellung gegeben wäre.

Um nun die Zahl der günstigen Kugelgruppen nach diesen Bemerkungen zu bestimmen, ist das Polynomium

$$P = (x + x^2 + x^3 + \dots x^m)^p = \left(\frac{x - x^{m+1}}{1 - x}\right)^p = (1 - x^m)^p \cdot \frac{x^p}{(1-x)^p}$$

zu entwickeln und die Vorzahl zu bestimmen, welche dem Gliede x^s zu-

gehört. Es ist bekanntlich

$$\frac{x^p}{(1-x)^p} = \frac{(p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^p + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^{p+1} + \frac{(p+1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^{p+2} + \frac{(p+2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^{p+3} + \dots\dots$$

und

$$(1-x^m)^p = 1 - \frac{p}{1}\, x^m + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\, x^{2m} - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|-1}}\, x^{3m} - \frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}}\, x^{4m} - \dots\dots,$$

also

$$P = (1-x^m)^p \frac{x^p}{(1-x)^p} = \left(1 - px^m + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\, x^{2m} - \dots\dots\right)\left(\frac{(p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^p + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^{p+1} + \dots\dots\right)$$

$$= \frac{1}{1^{p-1|1}}\Big[(p-1)^{p-1|-1}\, x^p + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^{p+1} + \frac{(p+1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^{p+2} + \frac{(p+2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\, x^{p+3} + \dots\dots$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
+(m+p-1)^{p-1|-1} & x^{m+p} + (m+p)^{p-1|-1} & x^{m+p+1} + (m+p+1)^{p-1|-1} & x^{m+p+2} + \dots\dots \\
-\frac{p}{1}(p-1)^{p-1|-1} & -\frac{p}{1}\, p^{p-1|-1} & -\frac{p}{1}(p+1)^{p-1|-1} & -\dots\dots \\
 & & & \\
+(2m+p-1)^{p-1|-1} & x^{2m+p} + (2m+p)^{p-1|-1} & x^{2m+p+1} + (2m+p+1)^{p-1|-1} & x^{2m+p+2} + \dots\dots \\
-\frac{p}{1}(m+p-1)^{p-1|-1} & -p\,(m+p)^{p-1|1} & -\frac{p}{1}(m+p+1)^{p-1|-1} & \\
+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(p-1)^{p-1|-1} & +\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\, p^{p-1|-1} & +\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(p+1)^{p-1|-1} & \\
\end{array}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big].$$

Aus dieser Formel läfst sich nun leicht die Form der Vorzahl von x^s und damit die gesuchte Gruppen-Anzahl abnehmen. Sie ist

$$1.\quad A = P'[s(s);\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_m]^p$$

$$= \frac{1}{1^{p-1|1}}\Big[(s-1)^{p-1|-1} - \frac{p}{1}(s-m-1)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m-1)^{p-1|-1} - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}(s-3m-1)^{p-1|-1} + \dots\dots\Big].$$

Diese Reihe bricht ab, wenn ein Glied negativ wird, oder in 0 übergeht. Wird die Gleichung 1. durch die Zahl aller möglichen Gruppen m^p gemessen, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$2.\quad w = \frac{1}{1^{p-1|1}.m^p}\Big[(s-1)^{p-1|-1} - \frac{p}{1}(s-m-1)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m-1)^{p-1|-1} - \dots\dots\Big].$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summen der auf den gezogenen Kugeln sich zeigenden Zahlen entweder s oder eine der niedrigeren sind?

Die Zahl der günstigen Fälle wird sich ergeben, wenn wir in die Gleichung 1. allmälig die Werthe p, $p+1$, $p+2$, ... s statt s setzen,

die hiedurch entstandenen Ausdrücke zusammenzählen und dann durch die Zahl m^p aller möglichen Fälle theilen. Dies giebt folgende Zusammenstellung:

$$3.\quad A = \frac{1}{1^{p-1|1}}\Big[(p-1)^{p-1|-1}$$
$$+p^{p-1|-1}$$
$$+(p+1)^{p-1|-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+(m+p-1)^{p-1|-1} - p(p-1)^{p-1|-1}$$
$$+(m+p)^{p-1|-1} \quad - p.p^{p-1|-1}$$
$$+(m+p+1)^{p-1|-1} - p(p+1)^{p-1|-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(2m+p-1)^{p-1|-1} - p(m+p-1)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(p-1)^{p-1|-1}$$
$$+(2m+p)^{p-1|-1} \quad - p(m+p)^{p-1|-1} \quad + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}p^{p-1|-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(s-1)^{p-1|-1} \quad - p(s-m-1)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m-1)^{p-1|-1} - \ldots\Big].$$

Werden die Verticalreihen dieser Formel summirt, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Gruppen-Anzahl:

$$4.\quad A = \frac{1}{1^{p|1}}\Big[s^{p|-1} - p(s-m)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m)^{p|-1} - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}(s-3m)^{p|-1} + \ldots\Big].$$

Die Wahrscheinlichkeit wird

$$5.\quad w = \frac{1}{1^{p|1}m^p}\Big[s^{p|-1} - p(s-m)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m)^{p|-1} - \ldots\Big]$$

sein; s kann sich hierin von p bis zu pm erheben.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summen der auf den gezogenen Kugeln erscheinenden Zahlen zwischen q und s liegen, also eine der Summen $q+1$, $q+2$, $q+3$, ... s sind?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn wir diejenige, dafs Kugeln erscheinen, deren Zahlen die Summe q oder eine geringere Summe bilden, vorerst angeben und sie dann von der in 5. ausgedrückten abziehen. Die erstere findet sich, wenn q statt s in 5. gesetzt wird. Dies giebt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$6. \quad w = \frac{1}{1^{p|1} m^p} \left[s^{p|-1} - p\,(s-m)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m)^{p|-1} - \ldots . \right]$$
$$- \frac{1}{1^{p|1} m^p} \left[q^{p|-1} - p(q-m)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(q-2m)^{p|-1} - \ldots . \right].$$

Sind die Kugeln mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, ... m bezeichnet, so bleiben die Schlüsse ungeändert. Die Zahl der Kugeln erhöht sich um die Einheit und die Summe um die Classenzahl; nach 41. §. 18. d. Combinationslehre. Die Wahrscheinlichkeiten, Kugeln zu ziehen, deren Zahlen eine bestimmte Summe oder den Inbegriff mehrerer Summen geben, gehen nach den angegebenen Modificationen in andere über. Aus 2. wird

$$7. \quad w = \frac{(s+p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|-1}(m+1)^p} - \frac{p(s+p-m-2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(m+1)^p} + \frac{p^{2|-1}(s+p-m-3)^{p-1|-1}}{1.2.1^{p-1|1}(m+1)^p} - \ldots .$$

Aus 5. wird

$$8. \quad w = \frac{1}{1^{p|1}(m+1)^p} \left[(s+p)^{p|-1} - p(s+p-m-1)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m-2)^{p|-1} - \ldots . \right].$$

Aus 6. wird

$$9. \quad w = \frac{1}{1^{p|1}(m+1)^p} \left[(s+p)^{p|-1} - p(s+p-m-1)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m-2)^{p|-1} - \ldots . \right].$$
$$- \frac{1}{1^{p|1}(m+1)^p} \left[(q+p)^{p|-1} - p(q+p-m-1)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(q+p-2m-2)^{p|-1} - \ldots . \right].$$

Diese Gleichungen lassen sich unter andern auf das Zahlensystem anwenden. Sind in einer Urne die Zahlen, welche aus p Ziffern und weniger bestehen, enthalten, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, deren Ziffern die Summe s betragen, wenn $m=9$ in 7. gesetzt und das Resultat durch die Anzahl 10^p-1 aller Zahlen, welche p oder weniger Ziffern haben, gemessen wird. Demnach ist

$$10. \quad w = \frac{(s+p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(10^p-1)} - \frac{p(s+p-11)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(10^p-1)} + \frac{p^{2|-1}(s+p-21)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(10^p-1)} - \ldots .$$

u. s. w. So ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, welche alle sechsstelligen und niedrigere Ziffern enthält, eine Zahl zu ziehen, deren Ziffern die Summe 25 betragen, $\frac{39482}{999999}$; die aber, eine Zahl zu ziehen, deren Ziffern die genannte Summe oder eine niedrigere betragen, ist $\frac{254808}{999999}$ u. s. w.

§. 15.

In einer Urne sind r Arten von Kugeln enthalten, jede mit einer beliebig grofsen Anzahl von Kugeln. Den Kugeln erster Art sind die Zahlen k_1+1, k_1+2, k_1+3, ... m_1, denen zweiter Art die Zahlen k_2+1, k_2+2, k_2+3, ... m_2 u. s. w., denen $r$ter Art die Zahlen k_r+1, k_r+2, k_r+3, ... m_r aufgeschrieben. Man zieht p mal und nimmt jedesmal eine Kugel heraus, die nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die auf den gezogenen Kugeln aufgeschriebenen Zahlen die Summe s betragen werden?

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen kommt mit der Anzahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus r Elementenreihen, welche auf die in der Frage angegebene Weise beschränkt sind, zur Summe s in der $p$ten Classe gebildet werden. Benutzt man nun die im vorigen Paragraph angegebene Methode, so hat man die Vorzahl von x^s in der entwickelten Darstellung des Polynomiums

$$P^p = [x^{k_1+1}+x^{k_1+2}+x^{k_1+3}+\ldots\ldots+x^{m_1}+x^{k_2+1}+x^{k_2+2}+\ldots\ldots x^{m_2}+\ldots \\ \ldots+x^{k_r+1}+x^{k_r+2}+x^{k_r+3}+\ldots\ldots x^{m_r}]^p$$

zu suchen. Die Glieder des vorstehenden Polynomiums lassen sich auf eine einfachere Form bringen, und es ist

$$P^p = \left[\frac{x^{k_1+1}-x^{m_1+1}}{1-x}+\frac{x^{k_2+1}-x^{m_2+1}}{1-x}+\frac{x^{k_3+1}-x^{m_3+1}}{1-x}+\ldots\ldots\frac{x^{k_r+1}-x^{m_r+1}}{1-x}\right]^p$$

$$= \frac{x^p}{(1-x)^p}[x^{k_1}+x^{k_2}+x^{k_3}+\ldots\ldots x^{k_r}-x^{m_1}-x^{m_2}-x^{m_3}-\ldots\ldots x^{m_r}]^p.$$

Benutzen wir die im vorigen Paragraph angegebene Entwicklung von $\frac{x^p}{(1-x)^p}$, so ergiebt sich

$$P^p = \frac{1}{1^{p-1|1}}(x^p+p^{p-1|-1}x^{p+1}+(p+1)^{p-1|-1}x^{p+2}+(p+2)^{p-1|-1}x^{p+3}+\ldots\ldots)$$

$$\times\Big(x^{k_1p}-\frac{p}{1}x^{(p-1)k_1}(x^{m_1}+x^{m_2}+\ldots\ldots x^{m_r}-x^{k_2}-x^{k_3}-x^{k_4}-\ldots\ldots x^{k_r})$$

$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}x^{(p-2)k_1}(x^{m_1}+x^{m_2}+\ldots\ldots x^{m_r}-x^{k_2}-x^{k_3}-x^{k_4}-\ldots\ldots x^{k_r})^2$$

$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}x^{(p-3)k_1}(x^{m_1}+x^{m_2}+\ldots\ldots x^{m_r}-x^{k_2}-x^{k_3}-x^{k_4}-\ldots\ldots x^{k_r})^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big).$$

Werden die angezeigten Entwicklungen ausgeführt und wird die hieraus sich ergebende Vorzahl von x^s abgeleitet, so erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$2.\quad A = \frac{1}{1^{p-1|1}} \Big\{ (s-k_1 p-1)^{p-1|-1}$$

$$- \frac{p}{1} \Big[(s-(p-1)k_1-m_1-1)^{p-1|-1} - (s-(p-1)k_1-k_2-1)^{p-1|-1}$$
$$+ (s-(p-1)k_1-m_2-1)^{p-1|-1} - (s-(p-1)k_1-k_3-1)^{p-1|-1}$$
$$+ (s-(p-1)k_1-m_3-1)^{p-1|-1} - (s-(p-1)k_1-k_4-1)^{p-1|-1}$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+ (s-(p-1)k_1-m_r-1)^{p-1|-1} - (s-(p-1)k_1-k_r-1)^{p-1|-1} \Big]$$

$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \Big[(s-(p-2)k_1-2m_1-1)^{p-1|-1} + 2 \left| \begin{array}{l} (s-(p-2)k_1-m_1-m_2-1)^{p-1|-1} \\ (s-(p-2)k_1-m_1-m_3-1)^{p-1|-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (s-(p-2)k_1-m_1-m_r-1)^{p-1|-1} \\ -(s-(p-2)k_1-m_1-k_2-1)^{p-1|-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -(s-(p-2)k_1-m_1-k_r-1)^{p-1|-1} \end{array} \right.$$

$$+ \frac{2.1}{1.2} \left| \begin{array}{l} (n-(p-2)k_1-2m_2-1)^{p-1|-1} \\ +2 \left| \begin{array}{l} (n-(p-2)k_1-m_1-m_3-1)^{p-1|-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -(n-(p-2)k_1-m_2-k_r-1)^{p-1|-1} \end{array} \right. \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\frac{2.1}{1.2}(n-(p-2)k_1-2k_r-1)^{p-1|-1} \Big] \end{array} \right.$$

$$- \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} \Big[(s-(p-3)k_1-3m_1-1)^{p-1|-1} + 3 \left| \begin{array}{l} (s-(p-3)k_1-2m_1-m_2-1)^{p-1|-1} \\ (s-(p-3)k_1-2m_1-m_3-1)^{p-1|-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -(s-(p-3)k_1-2m_1-k_r-1)^{p-1|-1} \end{array} \right.$$

$$+ \frac{3.2}{1.2} \left| \begin{array}{l} (s-(p-3)k_1-m_1-2m_2-1)^{p-1|-1} \\ +2 \left| \begin{array}{l} (s-(p-3)k_1-m_1-m_2-m_3-1)^{p-1|-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -(s-(p-3)k_1-m_1-m_2-k_r-1)^{p-1|-1} \end{array} \right. \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (-1)^2(s-(p-3)k_1-m_1-2k_r-1)^{p-1|-1} \end{array} \right. + \frac{3.2.1}{1.2.3} \left| \begin{array}{l} (s-(p-3)k_1-3m_2-1)^{p-1|-1} \\ 3 \left| \begin{array}{l} (s-(p-3)k_1-2m_2-m_3-1)^{p-1|-1} \\ (s-(p-3)k_1-2m_2-m_4-1)^{p-1|-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -(s-(p-3)k_1-2m_2-k_r-1)^{p-1|-1} \end{array} \right. \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (-1)^3(s-(p-3)k_1-3k_r-1)^{p-1|-1} \end{array} \right.$$

$$+ \;\cdot \Big\}.$$

Diese Gleichung ist sehr allgemein, denn die Gröfsen $k_1, k_2, k_3, \ldots. k_r$, $m_1, m_2, m_3, \ldots. m_r$ stehen unter einander in keinem Zusammenhange und können beliebig angenommen werden. Das Bildungsgesetz, welches der Formel 2. zum Grunde liegt, läfst sich leicht erkennen. Es hängt mit der Erhebung der unter 1. angegebenen Polynomien in die verschiedenen Potenzen zusammen. In den Facultäten der Glieder, welche mit der Facultät $\frac{p}{1}$ in 2. verbunden sind, kommen die Gröfsen $m_1, m_2, m_3, \ldots. m_r$, $k_2, k_3, \ldots. k_r$ als Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zur ersten Classe neben der Gröfse $(p-1)k_1$ vor. In den Facultäten der Glieder, welche mit $\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}$ verbunden sind, kommen der Reihe nach die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zur zweiten Classe aus den nämlichen Elementen neben der Gröfse $(p-2)k_1$ vor. In den Facultäten der Glieder, welche mit $\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}$ verbunden sind, kommen der Reihe nach Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zur dritten Classe aus den angegebenen Elementen neben der Gröfse $(p-3)k_1$ vor u. s. w. Alle die so entstehenden Gruppen sind von s abzuziehen, und dann ist von diesem um die Einheit verminderten Grundfactor die $(p-1)$te Facultät zu nehmen. Jede so entstandene Facultät hat aufserdem eine Vorzahl. Dieselbe hängt von der Dimension der in ihr vorkommenden Elemente ab und giebt die Zahl der Versetzungen an, welche diese Elemente unter sich bilden können. Das Zeichen, welches jede Facultät insbesondere hat, hängt von der Zahl ab, in welcher die Elemente $k_2, k_3, k_4, \ldots. k_r$ in dem Grundfactor einer Facultät vorkommen, da diese Elemente nach 1. negativ betrachtet werden. In Zeichen stellt sich 2. so dar:

$$3. \quad A = \Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$
$$\times \Big(\Sigma^{x=n} (-1)^{y_2+y_3+y_4+\ldots y_r} \cdot \frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots.1^{z_r|1}.1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots.1^{y_r|1}}$$
$$\times \frac{(s-(p-n)k_1 - z_1 m_1 - z_2 m_2 - z_3 m_3 \ldots. - z_r m_r - y_2 k_2 - y_3 k_3 - \ldots. - y_r k_r - 1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\Big).$$

Hierin ist allmälig 0, 1, 2, ... p statt x zu setzen. Für jeden einzelnen Werth von x sind dann die durch das zweite Σ angezeigten Verbindungen zu machen. Die Gröfsen nach dem zweiten Σ hängen so unter sich zusammen:

$$x = n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots. z_r + y_2 + y_3 + \ldots. y_r.$$

Für n sind alle möglichen Summen der Versetzungen mit Wiederholungen

aus den Elementen 0, 1, 2, ... x zu derjenigen Classe zu bilden, welche entsteht, wenn die Gröfsen

$$y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_r,\quad z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ z_r$$

als Einheiten betrachtet werden. Die Gröfsen $y_2, y_3, \ldots y_r$ beziehen sich auf $k_2, k_3, k_4, \ldots k_r$ und die Gröfsen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_r$ auf $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ... m_r. Nach diesen Bemerkungen ist nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$4.\quad w = \frac{1}{1^{p-1|1} m^p} \Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$
$$\times \Big(\Sigma^{x=n} (-1)^{y_2+y_3\ldots y_r} \frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots 1^{z_r|1}.1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots 1^{y_r|1}}$$
$$\times (s-(p-n)k_1-z_1m_1-z_2m_2\ldots-z_rm_r-y_2k_2-y_3k_3\ldots-y_rk_r-1)^{p-1|-1}\Big).$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die den Kugeln aufgeschriebenen Zahlen die Summe s oder eine niedrigere Summe betragen werden?

Wendet man das in 3. §. 11. befolgte Verfahren an, so ergiebt sich aus 2. und 3. dieses Paragraphen folgende Bestimmung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$5.\quad w = \frac{1}{1^{p|1} m^p} \Big[\Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$
$$\times \Big(\Sigma^{x=n} (-1)^{y_2+y_3+\ldots y_r} \frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots 1^{z_r|1}.1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots 1^{y_r|1}}$$
$$\times (s-(p-n)k_1-z_1m_1-z_2m_2-\ldots z_rm_r-y_2k_2-y_3k_3-\ldots-y_rk_r)^{p|-1}\Big)\Big].$$

Eben so leicht ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den genannten Bedingungen Kugeln erscheinen werden, deren aufgeschriebene Zahlen eine der Summen, welche zwischen q und s liegen, also eine der Summen $q+1$, $q+2$, ... s betragen, wenn wir das im vorigen Paragraph zu 6. angewendete Verfahren befolgen. Sie ist

$$6.\quad w = \frac{1}{1^{p|1} m^p} \Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}.$$
$$\times \Big(\Sigma^{x=n} (-1)^{y_2+y_3+\ldots y_r} \frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots 1^{z_r|1}\ldots 1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots 1^{y_r|1}}$$
$$\times (s-(p-n)k_1-z_1m_1-z_2m_2-\ldots-z_rm_r-y_2k_2-y_3k_3-\ldots-y_rk_r)^{p|-1}\Big)$$
$$-\frac{1}{1^{p|1} m^p} \Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$
$$\times \Big(\Sigma^{x=n} (-1)^{y_2+y_3+\ldots y_r} \frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots 1^{z_r|1}.1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots 1^{y_r|1}}$$
$$\times (q-(p-n)k_1-z_1m_1-z_2m_2\ldots-z_rm_r-y_2k_2-y_3k_3-\ldots-y_rk_r)^{p|-1}\Big).$$

§. 13.

In einer Urne sind mit den Zahlen 1, 2, 3, ... $2m-1$ bezeichnete Kugeln enthalten. Von denen, welche die Zahlen 1 und $2m-1$ haben, ist nur je eine vorhanden; von denen, welche die Zahlen 2 und $2m-2$ haben, sind je zwei vorhanden; von denen, welche die Zahlen 3 und $2m-3$ haben, sind je drei vorhanden u. s. w.; von denen, welche die Zahl m haben, sind m vorhanden. Es wird p mal gezogen und bei jeder Ziehung eine Kugel herausgenommen, die nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summe der den gezogenen Kugeln aufgeschriebenen Zahlen s betragen wird?

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen kommt mit der Zahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe s in der $p$ten Classe aus m Elementenreihen gebildet werden, worin die Stellenzahlen der einzelnen Elemente mit den Zahlen übereinstimmen, die den in der Urne enthaltenen Kugeln aufgeschrieben sind. Benutzen wir die in §. 11. angegebene Methode, so haben wir die Vorzahl von x^s in der entwickelten Darstellung des nachstehenden Polynoms zu bestimmen:

$$P^p = (x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots (m-1)x^{m-1} + mx^m + (m-1)^{m+1} + \ldots$$
$$\ldots 3x^{2m-3} + 2x^{2m-2} + x^{2m-1})^p.$$

Dies Polynom läfst sich auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{aligned} P^p = [x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots x^{2m-3} + x^{2m-2} + x^{2m-1}]^p \\ x^2 + x^3 + x^4 + \ldots x^{2m-3} + x^{2m-2} \\ + x^3 + x^4 + \ldots x^{2m-3} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x^{m-1} + x^m + x^{m+1} \\ + x^m \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x - x^{2m}}{1-x} + \frac{x^2 - x^{2m-1}}{1-x} + \frac{x^3 - x^{2m-3}}{1-x} + \ldots \frac{x^{m-1} - x^{m+2}}{1-x} + \frac{x^m - x^{m+1}}{1-x}\right]^p$$

$$= \frac{1}{(1-x)^p}\left[\frac{x - x^{m+1}}{1-x} - \frac{x^{m+1} - x^{2m+1}}{1-x}\right]^p = \frac{x^p}{(1-x)^{2p}}(1 - 2x^m + x^{2m})^p;$$

was ferner in folgenden Ausdruck übergeht:

$$1.\quad P^p = \left(x^p + \frac{(2p)^{2p-1|-1}}{1^{2p-1|1}}x^{p+1} + \frac{(2p+1)^{2p-1|-1}}{1^{2p-1|1}}x^{p+2} + \frac{(2p+2)^{2p-1|-1}}{1^{2p-1|1}}x^{p+3} + \ldots\right)$$
$$\times\left(1 - \frac{p}{1}(2x^m - x^{2m}) + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(2x^m - x^{2m})^2 - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}(2x^m - x^{2m})^3 + \ldots\right).$$

Werden nun die nöthigen Entwicklungen gemacht, so ergiebt sich für die gesuchte Vorzahl von x^s folgender Ausdruck:

$$2.\quad A=\frac{1}{1^{2p-1|1}}\Big\{(s+p-1)^{2p-1|-1}-p\big[2(s+p-m-1)^{2p-1|-1}$$
$$-(s+p-2m-1)^{2p-1|-1}\big]$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\big[2^2(s+p-2m-1)^{2p-1|-1}-2.2(s+p-3m-1)^{2p-1|-1}$$
$$+(s+p-4m-1)^{2p-1|-1}\big]$$
$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\Big[2^3(s+p-3m-1)^{2p-1|-1}-3.2^2(s+p-4m-1)^{2p-1|-1}$$
$$+\frac{3.2}{1.2}.2^1(s+p-5m-1)^{2p-1|-1}-\frac{3.2.1}{1.2.3}(s+p-6m-1)^{2p-1|-1}\Big]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}.$$

Werden die Glieder dieser Formel nach den unter sich gleichen Facultäten geordnet, so entsteht

$$3.\quad A=\frac{1}{1^{2p-1|1}}\Big[(s+p-1)^{2p-1|-1}-2p(s+p-m-1)^{2p-1|-1}$$
$$+\Big(\frac{2^2.p^{2|-1}}{1^{2|1}}+p\Big)(s+p-2m-1)^{2p-1|-1}$$
$$-\Big(2^3\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}+2.2\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big)(s+p-3m-1)^{2p-1|-1}$$
$$+\Big(2^4\frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}}+\frac{3}{1}.2^2.\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}+\frac{2.1}{1.2}.\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big)(s+p-4m-1)^{2p-1|-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big].$$

Werden die einer und derselben Facultät zugehörigen Ausdrücke zusammengezählt, so kommt man durch eine einfache Entwicklung zu folgender Darstellung für die gesuchte günstige Gruppen-Anzahl:

$$4.\quad A=\frac{1}{1^{2p-1|1}}\Big[(s+p-1)^{2p-1|-1}-\frac{2p}{1}(s+p-m-1)^{2p-1|-1}$$
$$+\frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m-1)^{2p-1|-1}-\frac{(2p)^3}{1^{3|1}}(s+p-3m-1)^{2p-1|-1}+\ldots\Big].$$

Die Zahl aller in der Urne befindlichen Kugeln ist m^2. Demnach ist die Zahl aller möglichen Kugelgruppen m^{2p} und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$5.\quad w=\frac{1}{1^{2p-1|1}m^{2p}}\Big[(s+p-1)^{2p-1|-1}-\frac{2p}{1}(s+p-m-1)^{2p-1|-1}$$
$$+\frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m-1)^{2p-1|-1}-\ldots\Big].$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sich auf den in p Ziehungen erschienenen Kugeln die Summe s oder eine niedrigere zeigen wird?

Wenden wir das in § 11. 3. gezeigte Verfahren an, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$6.\quad w=\frac{1}{1^{2p|1}m^{2p}}\Big[(s+p)^{2p|-1}-\frac{2p}{1}(s+p-m)^{2p|-1}$$
$$+\frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m)^{2p|-1}-\ldots\Big].$$

Soll nun unter den nämlichen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs die Summe, welche durch die Zahlen der gezogenen Kugeln gebildet wird, zwischen q und s liegen oder unter einer der Summen $q+1$, $q+2$, ... s begriffen sei, so ergiebt sich auf die nämliche Weise:

$$7.\quad w=\frac{1}{1^{2p|-1}m^{2p}}\Big[(s+p)^{2p|-1}-\frac{2p}{1}(s+p-m)^{2p|-1}$$
$$+\frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m)^{2p|-1}-\ldots\Big]$$
$$-\frac{1}{1^{2p|1}m^{2p}}\Big[(q+p)^{2p|-1}-\frac{2p}{1}(q+p-m)^{2p|-1}+\frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(q+p-2m)^{2p|-1}-\ldots\Big]$$

oder, anders geordnet,

$$8.\quad w=\frac{1}{1^{2p|1}.m^{2p}}\Big\{(s+p)^{2p|-1}-(q+p)^{2p|-1}$$
$$-\frac{2p}{1}\Big[(s+p-m)^{2p|-1}-(q+p-m)^{2p|-1}\Big]$$
$$+\frac{2p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[(s+p-2m)^{2p|-1}-(q+p-2m)^{2p|-1}\Big]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}.$$

§. 14.

In einer Urne befinden sich mit den Zahlen 1, 2, 3, ... $2m-1$ bezeichnete Kugeln. Von denen, welche die Zahlen 1 und $2m-1$ haben, ist nur je eine Kugel vorhanden; von denen, welche die Zahlen 2 und $2m-2$ haben, sind je drei vorhanden; von denen, welche die Zahlen 3 und $2m-3$ haben, sind je 6 vorhanden u. s. w.; von denen, welche die Zahl m haben, sind $\frac{m(m+1)}{1.2}$ vorhanden. Es wird $p$mal gezogen und bei jeder Ziehung eine Kugel aus der Urne genommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die den gezogenen Kugeln aufgeschriebenen Zahlen die Summe s geben werden?

Um die Zahl der günstigen Kugelgruppen zu finden, haben wir die Entwicklung des Polynoms

$$P^p=\Big[x+3x^2+6x^3+\ldots\frac{m(m+1)}{1.2}+\ldots+6x^{2m-3}+3x^{2m-2}+x^{2m-1}\Big]^p,$$

welches nach der oben angegebenen Methode in Frage kommt, zu machen und die Vorzahl des Gliedes x^s zu suchen. Wir zerlegen das Polynom

auf folgende Weise:

$$P^p =$$

$$\begin{array}{c}[x+2x^2+3x^3+\ldots(m-1)x^{m-1}+mx^m+(m-1)x^{m+1}+\ldots 3x^{2m-3}+2x^{2m-2}+x^{2m-1}]^p\\ x^2+2x^3+\ldots(m-2)x^{m-1}+(m-1)x^m+(m-2)x^{m+1}+\ldots 2x^{2m-3}+x^{2m-2}\\ +x^3+\ldots(m-3)x^{m-1}+(m-2)x^m+(m-3)x^{m+1}+\ldots x^{2m-3}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^{m-1}+2x^m+x^{m+1}\\ +x^m\end{array}$$

Wird jede Horizontalreihe in diesem Ausdruck nach der zu Anfang des vorigen Paragraphs angeführten Weise behandelt, so erhalten wir Folgendes:

$$P^p = \left[\frac{x-2x^{m+1}+x^{2m+1}}{(1-x)^2}+\frac{x^2-2x^{m+1}+x^{2m}}{(1-x)^2}+\frac{x^3-2x^{m+1}+x^{2m-1}}{(1-x)^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{x^{m-1}-2x^{m+1}+x^{m+3}}{(1-x)^2}+\frac{x^m-2x^{m+1}+x^{m+2}}{(1-x)^2}\right]^p.$$

Werden die Ausdrücke in dieser Formel gehörig geordnet, und wird der Vervollständigung wegen x^{m+1} zugezählt und abgezogen, so ergiebt sich

$$P^p = \frac{1}{(1-x)^{2p}}[x+x^2+x^3+\ldots x^{2m+1}-(2m+1)x^{m+1}]^p$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{2p}}\left[\frac{x-x^{2m+2}}{1-x}-(2m+1)x^{m+1}\right],$$

und hieraus

$$1.\quad P^p = \frac{x^p}{(1-x)^{3p}}[1-x^{2m+1}-(2m+1)(x^m-x^{m+1})]^p.$$

Benutzen wir diesen Ausdruck zur Entwicklung, so findet sich

$$P^p = \left(x^p+\frac{(3p)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}x^{p+1}+\frac{(3p+1)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}x^{p+2}+\frac{(3p+2)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}x^{p+3}+\ldots\right)$$

$$\times\Big[1-p\,[x^{2m+1}+(2m+1)(x^m-x^{m+1})]$$

$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}[x^{2m+1}+(2m+1)(x^m-x^{m+1})]^2$$

$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}[x^{2m+1}+(2m+1)(x^m-x^{m+1})]^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big].$$

Werden die angezeigten Verbindungen gemacht, so erhält man für die Zahl der günstigen Fälle folgenden Ausdruck der Vorzahl von x^s:

$$2.\quad A = \frac{1}{1^{3p-1|1}}\Big[(s+2p-1)^{3p-1|-1} - p\,[(s+2p-2m-2)^{3p-1|-1} + (2m+1)\left| \begin{array}{l} +(s+2p-m-1)^{3p-1|-1} \\ -(s+2p-m-2)^{3p-1|-1}] \end{array}\right.$$

$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}[s+2p-4m-3)^{3p-1|-1} + 2(2m+1)\left| \begin{array}{l} +(s+2p-3m-2)^{3p-1|-1} \\ -(s+2p-3m-3)^{3p-1|-1} \end{array}\right. + (2m+1)^2 \left| \begin{array}{l} +(s+2p-2m-1)^{3p-1|-1} \\ -2(s+2p-2m-2)^{3p-1|-1} \\ +(s+2p-2m-3)^{3p-1|-1}] \end{array}\right.$$

$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}[(s+2p-6m-4)^{3p-1|-1} + 3(2m+1)\left| \begin{array}{l} +(s+2p-5m-3)^{3p-1|-1} \\ -(s+2p-5m-4)^{3p-1|-1} \end{array}\right. + \frac{3.2}{1.2}\left| \begin{array}{l} +(s+2p-4m-2)^{3p-1|-1} + \ldots \\ -2(s+2p-4m-3)^{3p-1|-1} \\ +(s+2p-4m-4)^{3p-1|-1}] \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big].$$

Die zweiten, dritten Glieder u. s. w. dieser Horizontalreihen bilden, wie leicht zu sehen, die ersten, zweiten, dritten Unterschiede u. s. w. der Facultäten. Sie lassen sich nach der Gleichung

$$3.\quad \Delta^r \frac{x^{q|-h}}{1^{q|1}} = \frac{(x+rh)^{q|-h}}{1^{q|1}} - \frac{r}{1}\cdot\frac{(x+(x-1)h)^{q|-h}}{1^{q|1}} + \frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(x+(r-2)h)^{q|-h}}{1^{q|1}} - \ldots$$

$$\ldots(-)^r \frac{x^{q|-h}}{1^{q|1}} = \frac{q^{r|-1}}{1^{q|1}} x^{q-r|-h}.h^r = \frac{x^{q-r|-h}.h^r}{1^{q-r|1}}$$

umformen. Durch Benutzung dieser Gleichung geht die Formel 2. in folgende über:

$$4.\quad A = \frac{(s+2p-1)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}} - p\left[\frac{(s+2p-2m-2)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}} + (2m+1)\frac{(s+2p-m-2)^{3p-2|-1}}{1^{3p-2|1}}\right]$$

$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(s+2p-4m-3)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}} + 2(2m+1)\frac{(s+2p-3m-3)^{3p-2|-1}}{1^{3p-2|1}} + (2m+1)^2\frac{(s+2p-2m-3)^{3p-3|-1}}{1^{3p-3|1}}\right]$$

$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\frac{(s+2p-6m-4)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}} + 3(2m+1)\frac{(s+2p-5m-4)^{3p-2|-1}}{1^{3p-2|1}} + \frac{3.2}{1.2}(2m+1)^2\frac{(s+2p-4m-4)^{3p-3|-1}}{1^{3p-3|1}} + \frac{3.2.1}{1.2.3}(2m+1)^3\frac{(s+2p-3m-4)^{3p-4|-1}}{1^{3p-4|1}}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder in Zeichen:

$$5.\quad A =$$

$$\Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{(s+2p-y(2m+1)-z(m+1)-1)^{3p-z-1|-1}}{1^{3p-z-1|1}}\right).$$

In diesem Ausdruck ist statt x allmälig 0, 1, 2, 3, ... p zu setzen, dann für jeden einzelnen Werth von x der Werth $y+z$ nach dem zweiten Σ beizubehalten; für $y+z$ sind die verschiedenen Summen zur zweiten Classe zu bilden und ihre Werthe nach Angabe der Gleichung einzuführen.

Um nun die fragliche Wahrscheinlichkeit zu erhalten, ist 4. oder 5. durch die Zahl aller möglichen Kugelgruppen zu messen. Die Zahl aller in der Urne enthaltenen Kugeln ist

$$A_1 = \frac{m^{3|1}}{1^{3|1}} + \frac{(m-1)^{3|1}}{1^{3|1}} = \frac{m(m-1)(2m+1)}{1.2.3}.$$

Diese Zahl ist in die $p$te Potenz zu erheben und dann ist 4. oder 5. damit zu messen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$6.\quad w = \frac{6^p}{m^p(m+1)^p(2m+1)^p}$$

$$\times \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{(s+2p-y(2m+1)-z(m+1)-1)^{3p-z-1|-1}}{1^{3p-z-1|1}}\right).$$

Die Bedingungen sind wie oben. Man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dafs in p Ziehungen Kugeln erscheinen werden, welche die Summe s oder eine niedrigere Summe bilden.

Wenden wir hier das in 3. §. 14. gebrauchte Verfahren an, so erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$7.\quad w = \frac{6^p}{m^p(m+1)^p(2m+1)^p}$$

$$\times \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{[s+2p-y(2m+1)-z(m+1)]^{3p-z|-1}}{1^{3p-z|1}}\right).$$

Soll nun die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs Kugeln erscheinen werden, deren Zahlen eine der Summen $q+1$, $q+2$, $q+3$, ... s bilden, so findet sich auf die nämliche Weise folgende Formel:

$$8.\quad w = \frac{6^p}{m^p(m+1)(2m+1)^p}$$

$$\times \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{[s+2p-y(2m+1)-z(m+1)]^{3p-z|-1}}{1^{3p-z|1}}\right)$$

$$-\frac{6^p}{m^p(m+1)^p(2m+1)^p}$$

$$\times \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{[q+2p-y(2m+1)-z(m+1)]^{3p-z|-1}}{1^{3p-z|1}}\right).$$

In 7. und 8. gelten die nämlichen Bedingungen, welche zu 5. angegeben wurden.

§. 18.

Wird die Zahl der Elemente unendlich grofs, so werden auch der Summen, welche durch sie erzeugt werden können, unendlich viele. Die einzelnen Elemente und Summen liegen dann einander unendlich nahe und werden, dem Ganzen gegenüber, unendlich klein. Es verschwinden also dann die endlichen Gröfsen in den Gleichungen 2. §. 14., 5. §. 16. und 6. §. 17. und die Facultäten gehen in Potenzen über. Dabei werden auch die Wahrscheinlichkeiten, eine bestimmte Summe unter unendlich vielen zu erhalten, unendlich klein und gehen in Differenziale über, die sich auf das Verhältnifs zwischen der fraglichen Summe und der Elementengrenze beziehen. Hiernach wird aus 2. §. 14., wenn $\frac{s}{m} = n$ ist,

$$1. \quad w = \frac{1}{1^{p-1|1}} \left[n^{p-1} - \frac{p}{1} (n-1)^{p-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} (n-2)^{p-1} - \ldots \right] \partial n.$$

Aus 5. §. 16. wird

$$2. \quad w = \frac{1}{1^{2p-1|1}} \left[n^{2p-1} - \frac{2p}{1} (n-1)^{2p-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}} (n-2)^{2p-1} - \ldots \right] \partial n.$$

Aus 6. §. 17. wird, da $\frac{m^p (m+1)^p (2m+1)^p}{6^p}$ in $\frac{m^{3p}}{3^p}$ übergeht,

$$3. \quad w = \Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}} \left(\Sigma^{x=y+z} \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1} \cdot 1^{z|1}} \cdot \frac{(n-(y+z))^{3p-z}}{1^{3p-z-1|1}} \right) \partial n.$$

Schliefst man nun die unendliche Anzahl der erzeugenden Elemente in bestimmte Grenzen ein, so werden auch die durch sie erzeugten Summen in bestimmte Grenzen eingeschlossen werden, und dann kann man durch die Gleichungen 1. 2. 3. die Wahrscheinlichkeiten finden, dafs unter den beliebig vielen Summen nur solche in Frage kommen, die selbst wieder innerhalb willkürlich gewählter Grenzen liegen. Zu dem Ende ist es nur nöthig, die vorstehenden Gleichungen innerhalb bestimmter Grenzen zu integriren. Werden nun die Integrale zwischen r und n genommen, und wird nach geschehener Integration $n = \frac{s}{m}$ und $r = \frac{q}{m}$ gesetzt, so entsteht aus den Gleichungen 1. 2. 3.:

$$4. \quad w = \int_r^n \frac{1}{1^{p-1|1}} \left[n^{p-1} - \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(n-2)^{p-1} - \ldots \right] \partial n$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{1^{p|1}} \Big[\left(\tfrac{s}{m}\right)^p - \left(\tfrac{q}{m}\right)^p & - p \left[\left(\tfrac{s}{m}-1\right)^p - \left(\tfrac{q}{m}-1\right)^p \right] \\ & + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \left[\left(\tfrac{s}{m}-2\right)^p - \left(\tfrac{q}{m}-2\right)^p \right] \\ & - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} \left[\left(\tfrac{s}{m}-3\right)^p - \left(\tfrac{q}{m}-3\right)^p \right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$5. \quad w = \int_r^n \frac{1}{1^{2p-1|1}} \left[n^{2p-1} - \frac{2p}{1}(n-1)^{2p-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \ldots \right] \partial n$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{1^{2p|1}} \Big[\left(\tfrac{s}{m}\right)^{2p} - \left(\tfrac{q}{m}\right)^{2p} & - 2p \left[\left(\tfrac{s}{m}-1\right)^{2p} - \left(\tfrac{q}{m}-1\right)^{2p} \right] \\ & + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}} \left[\left(\tfrac{s}{m}-2\right)^{2p} - \left(\tfrac{q}{m}-2\right)^{2p} \right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$6. \quad w = \int_r^n \Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}} \left(\Sigma^{x=y+z} \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1} . 1^{z|1}} . \frac{(n-(y+z))^{3p-z}}{1^{3p-z-1|1}} \right) \partial n$$

$$\begin{aligned} = \frac{3^p}{1^{3p|1}} \Big\{ & \left(\tfrac{s}{m}\right)^{3p} - p \left[\left(\tfrac{s}{m}-2\right)^{3p} + 2.3p \left(\tfrac{s}{m}-1\right)^{3p-1} \right] \\ & + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \left[\left(\tfrac{s}{m}-4\right)^{3p} + 2.2.3p \left(\tfrac{s}{m}-3\right)^{3p-1} + 2^2 (3p)^{2|-1} \left(\tfrac{s}{m}-2\right)^{3p-2} \right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \\ - \frac{3^p}{1^{3p|1}} \Big\{ & \left(\tfrac{q}{m}\right)^{3p} - p \left[\left(\tfrac{q}{m}-2\right)^{3p} + 2.3p \left(\tfrac{q}{m}-1\right)^{3p-1} \right] \\ & + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \left[\left(\tfrac{q}{m}-4\right)^{3p} + 2.2.3p \left(\tfrac{q}{m}-3\right)^{3p-1} + 2^2 (3p)^{2|-1} \left(\tfrac{q}{m}-2\right)^{3p-2} \right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich benutzen, um die Sicherheit angestellter Beobachtungen und die Gröfse und Bedeutung der dabei vorgekommenen Fehler zu untersuchen. Die Aufgabe jeder Beobachtung, bei welcher verschiedene Resultate gewonnen werden können, ist, ein möglichst fehlerfreies Resultat zu erlangen. *Nur ein* Resultat kann das richtige, jedes andere wird mehr oder weniger fehlerhaft sein. Könnte man sagen, welches Resultat unter mehreren das richtige sei, oder könnte man die Gröfse des mit einem bestimmten Resultate verbundenen Fehlers genau angeben, so wäre aus jeder Beobachtung das richtige Resultat leicht abzuleiten, und es wäre überflüssig, Beobachtungen zu wiederholen, um die dabei vorkommenden Fehler so gut als möglich zu entfernen.

Kommen bei Beobachtungen positive und negative Fehler vor, so werden die einen auf der einen, die andern auf der andern Seite des richtigen Resultates liegen und sich bis zu einer bestimmten Grenze erstrecken. Nennt man diese Grenzen $+m$ und $-m$, so läfst sich fragen: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die bei den Beobachtungen vorgekommenen Fehler sich nicht über die Grenzen $+n$ und $-n$ entfernen werden.

Die Gleichungen 4. 5. und 6. gehen von verschiedenen Voraussetzungen aus. Die Gleichung 4. geht von der Voraussetzung aus, dafs alle Fehler, welche zwischen den äufsersten Fehlergrenzen $+m$ und $-m$ liegen, gleich möglich sind, oder dafs jede Beobachtung gleich leicht jedes beliebige Resultat treffen werde.

Die Gleichung 5. geht von der Ansicht aus, dafs das richtige Resultat öfter gewonnen werde, als ein fehlerhaftes; überhaupt am oftesten unter allen Resultaten; dafs sich die Möglichkeit, ein fehlerhaftes Resultat zu erhalten, in dem Maafse verringere, wie der Fehler zunimmt; und dafs die Möglichkeit, bis zu einer der äufsersten Fehlergrenzen zu irren, am kleinsten sei.

Die Gleichung 6. geht von der nämlichen Voraussetzung wie 5. aus, unterscheidet sich jedoch von dieser durch diejenige, dafs die Geschicklichkeit des Beobachters, die Fehler zu vermeiden, oder die richtigeren Resultate vor den unrichtigen zu gewinnen, im quadratischen Verhältnisse stehe.

Für die Gleichung 4. liegen die erzeugenden Elemente zwischen 0 und m. Um nun diese Gleichung für den Fall, wenn die äufsersten Fehlergrenzen $+m$ und $-m$ sind, brauchbar zu machen, hat man zu bemerken, dafs dies so viel ist, als wenn die erzeugenden Elemente zwischen 0 und $2m$ lägen. Die Summen liegen dann zwischen 0 und $2pm$, und der Werth des Mittelgliedes ist pm. Nennt man nun die Fehlergrenze, innerhalb welcher sich die Beobachtungen bewegen sollen, $+n$ und $-n$, so ist aus 4. die hiezu gehörige Wahrscheinlichkeit:

$$7.\quad w = \frac{1}{1^{p|1}}\Big\{\Big(\frac{pm+n}{2m}\Big)^p - \Big(\frac{pm-n}{2m}\Big)^p - p\Big[\Big(\frac{pm+n}{2m}-1\Big)^p - \Big(\frac{pm-n}{2m}-1\Big)^p\Big] + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\Big(\frac{pm+n}{2m}-2\Big)^p - \Big(\frac{pm-n}{2m}-2\Big)^p\Big] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}.$$

Wenden wir die nämlichen Bemerkungen auf die Gleichungen 5. und 6.

an, so gehen sie in folgende über:

$$8.\quad w=\frac{1}{1^{2p|1}}\Big\{\Big(\frac{pm+n}{m}\Big)^{2p}-\Big(\frac{pm-n}{m}\Big)^{2p}-\frac{2p}{1}\Big[\Big(\frac{pm+n}{m}-1\Big)^{2p}-\Big(\frac{pm-n}{m}-1\Big)^{2p}\Big]$$
$$+\frac{2p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\Big(\frac{pm+n}{m}-2\Big)^{2p}-\Big(\frac{pm-n}{m}-2\Big)^{2p}\Big]$$
$$\dots\dots\dots\dots\Big\},$$

$$9.\quad w=\frac{3^p}{1^{3p|1}}\Big\{\Big(\frac{pm+n}{m}\Big)^{3p}-p\Big[\Big(\frac{pm+n}{m}-2\Big)^{3p}+2.3p\Big(\frac{pm+n}{m}-1\Big)^{3p-1}\Big]$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\Big(\frac{pm+n}{m}-4\Big)^{3p}+2.2.3p\Big(\frac{pm+n}{m}-3\Big)^{3p-1}+2^2\frac{(3p)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big(\frac{pm+n}{m}-2\Big)^{3p-2}\Big]$$
$$\dots\dots\dots\dots\Big\}$$
$$-\frac{3^p}{1^{3p|1}}\Big\{\Big(\frac{pm-n}{m}\Big)^{3p}-p\Big[\Big(\frac{pm-n}{m}-2\Big)^{3p}+2.3p\Big(\frac{pm-n}{m}-1\Big)^{3p-1}\Big]$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\Big(\frac{pm-n}{m}-4\Big)^{3p}+2.2.3p\Big(\frac{pm-n}{m}-3\Big)^{3p-1}+2^3\frac{(3p)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big(\frac{pm-n}{m}-2\Big)^{3p-2}\Big]$$
$$\dots\dots\dots\dots\Big\}.$$

Der Werth von $pm+n$ und $pm-n$ mufs nach den besondern Bedingungen der Aufgabe für die vorstehenden Gleichungen vorerst ermittelt werden. Hiebei giebt p die Zahl der Beobachtungen an. Wir wenden nun die vorstehenden Gleichungen auf folgende Fälle an.

Drei Personen beobachten. Die äufserste Fehlergrenze liegt 4 Stufen rechts und links vom richtigen Resultat. Bei der ersten Person sind alle Fehler *gleich* möglich. Die Geschicklichkeit der zweiten Person, das richtige Resultat zu treffen, steht im arithmetischen Verhältnisse; die der dritten im quadratischen. Vier Beobachtungen werden von jeder gemacht. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der hiebei mögliche Fehler die erste Stufe nicht überschreiten werde?

Die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall ergiebt sich, wenn in 7. $p=4$, $m=4$, $pm+n=20$, $pm-n=12$ gesetzt wird. Sie ist

$$10.\quad w=\frac{1}{1^{4|1}8^4}[20^4-12^4-4(12^4-2^4)+6.2^4] = 0,598958\dots.$$

Für die im zweiten und dritten Fall ergiebt sich, bei den gleichen Werthen,

$$11.\quad w=\frac{3^4}{1^{8|1}}[5^8-3^8-8(4^8-2^8)+\dots.]=0,774781\dots.$$

$$12.\quad w=\frac{3^4}{1^{12|1}}[5^{12}-4(3^{12}+2.12.4^{11})+\dots.]-\frac{3^4}{1^{12|1}}[3^{12}-4(1+2.12.2^{11})+\dots.]$$
$$=0,885688\dots.$$

Die Betrachtung der hierher gehörigen speciellen Fälle läfst sich weiter verfolgen. Sie zeigt, welchen Werth die gröfsere Geschicklichkeit und Gewandtheit eines Beobachters vor der geringeren voraus hat, wenn beide die gleiche Anzahl von Beobachtungen machen.

Die Vergleichung der Gleichungen 7. und 8. führt auf eine interessante Folgerung. Wird nämlich $2p$ statt p in 7. gesetzt, wobei n in $2n$ übergeht, so ergiebt sich leicht, dafs hiedurch die Gleichung 7. mit 8. zusammenfällt. Demnach führt der Calcul auf folgende Bemerkung.

10. Die doppelte Zahl der Beobachtungen führt bei einem ungeübten Beobachter algebraisch zu dem gleich fehlerfreien Resultate, wie die einfache Zahl bei einem Beobachter, dessen Geschicklichkeit und Uebung, das richtige Resultat bei gleicher Fehlergrenze zu treffen, in einfachem arithmetischem Verhältnisse wächst. Der Calcul behauptet hiernach, dafs Fleifs und Ausdauer den Leistungen der Geschicklichkeit und Gewandtheit gleichkommen können.

Untersucht man die Gleichungen 8. und 9. weiter, so lassen sich aus ihnen noch andere nicht uninteressante Sätze ableiten. Dahin gehört:

11. Wird die Zahl der Beobachtungen gesteigert, so wird nicht nur die Wahrscheinlichkeit, ein richtiges Resultat zu erlangen, gröfser, sondern auch diejenige, dafs sich die Fehlergrenze in engere Schranken ziehen werde.

12. Je näher ein Fehler dem richtigen Resultate liegt, desto gröfser wird die Wahrscheinlichkeit, ihn zu begehen; je entfernter er vom richtigen Resultate liegt, oder je bedeutender und gröfserer ist, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit, ihn zu begehen. Dies Wachsen und Abnehmen steht aber nicht im einfachen arithmetischen Verhältnisse bei 8., und nicht im quadratischen bei 9.

13. Bei einer und derselben Anzahl von Beobachtungen ist die Güte der Resultate um so gröfser, je enger die Fehlergrenze gezogen wird; die Wahrscheinlichkeit jedoch, eine engere Fehlergrenze unter dieser Bedingung zu erhalten, verkleinert sich. U. s. w.

Wir verweisen jedoch, um nicht Gesagtes zu wiederholen, auf die oben angeführte Schrift „Die Versetzungen zu bestimmten Summen, §. 15. u. ff.", worin hier einschlagende Untersuchungen aufgenommen sind.

Die Neigungen der Ebenen der Planetenbahnen haben bekanntlich zusammen am Anfange des Jahrs 1801 81°,93 sechszigtheiliger Eintheilung

(= 91,08° hunderttheiliger) betragen, wenn man von der Ebene der Erdbahn als Basis ausgeht. Dabei entfernen sich die Bahnen der Ceres, Juno und Pallas um 10°, 13°, 34°. Zwei Bahnen, die des Merkurs und der Vesta, entfernen sich um etwa 7°, die der übrigen höchstens um 3°. Nimmt man nun an, dafs bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen eine Ursache in bestimmter Richtung am stärksten, und auf beiden Seiten in quadratischem Verhältnisse abnehmend, etwa wie die Schwungkraft, so gewirkt habe, dafs in einer Entfernung von 10° ihre Grenze zu setzen sei, und fragt: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs unter dieser Voraussetzung die Neigungen von 10 Planetenbahnen in die Grenzen von 5° auf beiden Seiten von der bezeichneten Richtung eingeengt geblieben wären, oder dafs die Breite des Thierkreises nicht 10° überschritten hätte, so erhalten wir aus 9., wenn $p=10$, $pm+n=150$, $pm-n=50$, $m=10$ gesetzt wird,

$$w = \frac{3^{10}}{1^{30|1}}\left\{15^{30}-10[13^{39}-60.14^{29}]+\frac{10.9}{1.2}[11^{30}+4.30.12^{29}+....]-....\right\}$$
$$-\frac{3^{10}}{1^{30|1}}\left\{5^{30}-10[3^{30}-60.\ 4^{29}]\right.$$
$$\left.+\frac{10.9}{1.2}[1^{30}+4.30.2^{29}+4.30.29.3^{28}]-....\right\}$$
$$= 0{,}999\,999\,992\,300\,1......$$

Der Werth dieser Wahrscheinlichkeit ist sehr grofs und liegt der Gewifsheit sehr nahe, und man kann daher mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dafs die Breite des Thierkreises 10° unter der obigen Voraussetzung nicht überschritten hätte. Stellen wir aber dieser Voraussetzung die Neigungen der Bahnen des Merkurs, der Vesta, Juno, Ceres und Pallas gegenüber, so übersteigen sie diese Grenze bedeutend und streiten gegen diese Annahme. Da sich aber mit ziemlicher Sicherheit nachweisen läfst (s. m. angef. Schrift §. 12. p. 69 u. ff. und *Laplace Théor. anal. d. prob. p. 257*), dafs bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen der Zufall nicht vorgeherrscht habe, da sich die Einwirkung des Zufalls mit der Stetigkeit der Naturgesetze nicht gut vereinigt, und die Annahme *einer* wirkenden Ursache am angemessensten scheint, so läfst sich mit ziemlicher Sicherheit folgern, dafs bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen *nur eine* Ursache gewirkt habe, dafs diese aber durch Zufälligkeiten, etwa durch die excentrische Lage des Schwerpunctes, durch Zerspringen der Massen u. s. w. gestört und so die Divergenz der Planetenbahnen hervorgebracht worden sei.

In dem vorliegenden speciellen Falle wurde der kürzern Berechnung wegen die Zahl der Planeten zu 10 statt zu 11 angenommen. Es ist einleuchtend, dafs der Werth der Wahrscheinlichkeit noch gröfser sein würde, wenn 11 Planeten in den Calcul aufgenommen worden wären.

Man erkennt leicht den Zusammenhang, in welchem die Probleme in §. 14 bis 18. stehen. Sie gehören einer gröfsern Reihe von Problemen an, die in meiner oben angeführten Schrift zusammengestellt und auf combinatorischem, so wie auf analytischem Wege behandelt wurden, und die wir deswegen hier nicht aufnehmen, sondern uns ihretwegen auf diese Schrift beziehen.

Die Gleichung 2. §. 14. ist schon von *Moivre* (in *Miscellan. analyt.* nach *Lacroix* Wahrscheinl. Rechnung §. 53.) und von *Laplace* (*Théor. anal. d. prob. No. 13. p. 25* u. f.) mitgetheilt worden. Unter specieller Form findet sich in dem angeführten Werke p. 257 die Gleichung 7. dieses Paragraphs.

§. 19.

Von r Urnen enthält jede m Kugeln, die der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m bezeichnet sind. Aus jeder Urne wird gleichzeitig eine Kugel gezogen und nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen. Die Ziehung geschieht $p$mal. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k bestimmte Kugeln erschienen sein werden?

Die Zahl der günstigen Fälle, welche bei einer Ziehung aus einer Urne eintreffen können, ist k. Bei r Urnen wird sich die Zahl auf k^r erheben. Werden nun p Ziehungen gemacht, so steigt die Zahl der günstigen Fälle auf

$$A = (k^r)^p = k^{rp}.$$

Auf gleiche Weise findet sich die Zahl aller möglichen Fälle. Sie ist

$$A_1 = m^{rp}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$1. \quad w = \frac{k^{rp}}{m^{rp}}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs k bestimmte Kugeln, also nicht mehr als diese Anzahl, erscheinen werden. Es ist also möglich, dafs nur eine, oder zwei, oder mehrere, oder alle zugleich, in beliebiger Verbindung erscheinen werden. Sie bestimmt also zugleich die Wahrscheinlichkeit, dafs keine von den $m-k$ übrigen Kugeln darunter

enthalten sein wird. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich sofort auch die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den obigen Verhältnissen in rp Ziehungen keine von k bestimmten Kugeln erscheinen werde. Sie ist

$$2.\quad w = \left(\frac{m-k}{m}\right)^{rp} = \left(1-\frac{k}{m}\right)^{rp}.$$

Diese Gleichung führt zu der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit

$$3.\quad w = 1-\left(\frac{m-k}{m}\right)^{rp}.$$

Sie bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs nicht keine von k bestimmten Kugeln, also dafs eine, oder zwei, oder mehrere, oder alle, ein- oder mehreremal, einzeln, oder in Verbindung, nicht nur unter sich, sondern auch in Verbindung mit den übrigen, oder dafs von k bestimmten Kugeln wenigstens eine einmal, oder mehreremal erscheinen werde. Setzt man $k=1$ in (3.), so ist

$$4.\quad w = 1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{rp}.$$

Diese Gleichung giebt die Wahrscheinlichkeit an, dafs unter den obigen Bedingungen eine bestimmte Kugel wenigstens einmal erschienen sei.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach p Ziehungen k bestimmte Kugeln, zugleich und darunter jede wenigstens einmal erscheinen werden?

Diese Wahrscheinlichkeit wird sich bestimmen lassen, wenn wir von der Anzahl derjenigen Fälle, in welchen eine bestimmte Kugel wenigstens einmal erscheinen wird, aus- und von ihr zu jeder von den übrigen k bestimmten Kugeln übergehen. Die Zahl der Fälle, in welchen eine Kugel wenigstens einmal erscheint, ergiebt sich aus (4.), wenn die Anzahl der Gruppen $(m-1)^{rp}$ von der Gesammtzahl m^{rp} abgezogen wird. Dies führt zu folgendem Ausdrucke:

$$m^{rp}-(m-1)^{rp}.$$

Da nun k bestimmte Kugeln in Betracht kommen, so erhält man

$$A_1 = m^{rp}-k(m-1)^{rp}.$$

Diese Bestimmung rechtfertigt sich leicht durch die Gleichung

$$\begin{aligned} A_1 = P'[1, 2, \ldots\, m]^{rp} & -1P'[2, 3, \ldots\, m]^{rp} \\ & -2P'[1, 3, 4, \ldots\, m]^{rp} \\ & -3P'[1, 2, 4, \ldots\, m]^{rp} \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & -kP'[1, 2, \ldots\, k-1, k+1, \ldots\, m]^{rp}. \end{aligned}$$

Man bemerkt leicht, dafs hierdurch zu viele Gruppen ausgeschieden worden sind. Der Überschufs mufs bestimmt und dem vorstehenden Ausdrucke zugezählt werden. Das angegebene Schema zeigt, dafs $n-2$ Kugeln unter je zwei Gruppen-Anzahlen zugleich, also zuviel ausgeschieden wurden. Unter $1P'[2,3,\ldots n]^{rp}$ und $2P'[1,3,\ldots m]^{rp}$ ist nämlich die gleiche Gruppen-Anzahl $P'[3,4,\ldots m]^{rp}$, unter $1P'[2,3,\ldots m]^{rp}$ und $3P'[1,2,4,\ldots m]^{rp}$ die Gruppen-Anzahl $P'[2,4,5,\ldots m]^{rp}$ u. s. w. ausgeschieden worden. Die Vereinigung aller dieser zuviel ausgeschiedenen Gruppen führt zu folgendem Ausdrucke:

$$\frac{k(k-1)}{2\cdot 1}(m-2)^{rp}.$$

Durch das Zuzählen dieses Ausdrucks ergiebt sich selbst wieder ein Überschufs in der günstigen Gruppen-Anzahl. Diesen hat man auf ähnliche Weise zu ermitteln. Setzt man diese Schlüsse fort, so erhält man folgenden weiter auszuscheidenden Ausdruck:

$$\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^{rp}.$$

Durch Fortsetzung dieser Bemerkungen entsteht endlich folgender Ausdruck, welcher die der Ziehung günstige Gruppen-Anzahlen in sich begreift:

$$5.\quad A = m^{rp} - k(m-1)^{rp} + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-2)^{rp} - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-3)^{rp} \ldots\ldots (-1)^k \frac{k^{k|-1}}{1^{k|1}}(m-k)^{rp}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$6.\quad w = 1 - k\left(\frac{m-1}{m}\right)^{rp} + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m-2}{m}\right)^{rp} - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{m-3}{m}\right)^{rp} + \ldots (-1)^k\left(\frac{m-k}{m}\right)^{rp},$$

oder, wenn man den Ausdruck durch Unterschiede zu Hülfe nimmt:

$$7.\quad w = \frac{\Delta^k (m-k)^{rp}}{m^{rp}}.$$

In diesem Ausdruck sind k und m in so weit von einander unabhängig, als k nicht gröfser als m werden kann. Dasselbe gilt von k und rp. Für $k = m$ wird aus (6.) und (7.)

$$8.\quad w = \frac{\Delta^m 0^{rp}}{m^{rp}} = 1 - m\left(\frac{m-1}{m}\right)^{rp} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m-2}{m}\right)^{rp} - \ldots (-1)^m\left(\frac{1}{m}\right)^{rp}.$$

Setzt man $rp = m$, so geht (8.) in

$$9.\quad w = \frac{\Delta 0^m}{m^m} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{m^m}$$

über; wie bekannt. Es ist klar, dafs alle die vorstehenden Gleichungen auch gelten,

wenn nur eine Urne vorhanden ist, worin sich m, mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ bezeichnete, Kugeln befinden. Die Zahl der Ziehungen wird dann rp sein. In diesem Fall kann sogar an die Stelle von rp jede beliebige Anzahl von Ziehungen gesetzt werden.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade q verschieden bezeichnete Kugeln (nicht mehr und nicht weniger) erscheinen werden?

Diese Frage beantwortet sich dadurch, dafs wir die Zahl der günstigen Fälle bestimmen, wo gerade q verschieden bezeichnete Kugeln aus einer Urne gezogen werden können, in welcher q verschiedene Kugeln enthalten sind. Diese Gruppen-Anzahl ergiebt sich aus (5.), wenn dort $m = k = q$ gesetzt wird. Hiernach ist

$$A = q^{rp} - q(q-1)^{rp} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(q-2)^{rp} - \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(q-3)^{rp} + \ldots (-1)^q 1^{rp}.$$

Die hiedurch ausgedrückte Anzahl kann so oft erscheinen, als sich Gruppen zur $q$ten Classe aus m verschiedenen Kugeln bilden lassen. Danach ist die dem Ereignisse günstige Gruppen-Anzahl:

$$10. \quad A = \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}}\left[q^{rp} - q(q-1)^{rp} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(q-2)^{rp} - \ldots\right] = \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}} \Delta^q 0^{rp}$$
$$= \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}} \Delta^q 0^{rp}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$11. \quad w = \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}}\left[\left(\frac{q}{m}\right)^{rp} - q\left(\frac{q-1}{m}\right)^{rp} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{q-2}{m}\right)^{rp} - \ldots\right]$$
$$= \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}} \cdot \frac{\Delta^q 0^{rp}}{m^{rp}}.$$

Durch Beantwortung der vorliegenden Frage wird auch die folgender möglich werden. Wie grofs ist unter den genannten Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens q verschiedene Kugeln in p hinter einander folgenden Ziehungen aus r Urnen erscheinen werden?

Die Bestimmung der Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle beruht darauf, dafs man die Zahl der Fälle angiebt, in welchen gerade q, oder $q+1$, oder $q+2$ u. s. w., oder endlich m verschieden bezeichnete Kugeln erscheinen werden. Sie wird gefunden, wenn m, $m-1$, $m-2$, ... $q+1$, q statt q in (10.) gesetzt wird. Durch Einführung dieser Werthe entsteht folgende Zusammenstellung:

$$A = m^{rp} - m(m-1)^{rp} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-2)^{rp} - \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-3)^{rp} + \ldots$$

$$+ m\left[(m-1)^{rp} - \frac{(m-1)}{1}(m-2)^{rp} + \frac{(m-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-3)^{rp} - \frac{(m-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-4)^{rp} + \ldots\right]$$

$$+ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[(m-2)^{rp} - \frac{(m-2)}{1}(m-3)^{rp} + \frac{(m-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-4)^{rp} - \frac{(m-2)^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-4)^{rp} + \ldots\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[q^{rp} - q(q-1)^{rp} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(q-2)^{rp} - \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(q-3) + \ldots\right].$$

Dieser Ausdruck scheint zwar ziemlich weitläuftig. Er läfst aber viele Reductionen zu, wenn die schiefliegenden Glieder in den Reihen zusammengestellt werden. Dies giebt

$$m(m-1)^{rp} - m(m-1)^{rp} = 0,$$

$$\frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}[(m-2)^{rp} - 2(m-2)^{rp} + (m-2)^{rp}] = \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}(1-1)^2(m-2)^{rp} = 0,$$

$$\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}[(m-3)^{rp} - 3(m-3)^{rp} + 3(m-3)^{rp} + (m-3)^{rp}] = \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}(1-1)^3(m-3)^{rp} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[q^{rp} - qq^{rp} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}q^{rp} - \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}q^{rp} + \ldots\right] = \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}(1-1)^q \cdot q^{rp} = 0.$$

Es verschwinden also alle in dem obigen Ausdruck schief liegende Glieder, bis zu dem zweiten in der letzten Horizontalreihe; denn sie führen die vollständige Entwicklung des Binomiums $(1-1)^k = 0$ mit sich. Vom zweiten Gliede der genannten Horizontalreihe an sind sie nicht mehr vollständig. Dennoch kann man sie als vollständig betrachten, wenn man nur, um den dadurch entstehenden Fehler wieder gut zu machen, die fehlenden Glieder mit den entgegengesetzten Zeichen zuzählt. Dieses giebt folgenden Ausdruck:

$$\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}[(1-1)^{m-q+1} - 1](q-1)^{rp} = -\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}(q-1)^{rp},$$

$$\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[(1-1)^{m-q+2} - 1 + \frac{m-q+2}{1}\right](q-2)^{rp} = \frac{m-q+1}{1} \cdot \frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}(q-2)^{rp},$$

$$\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[(1-1)^{m-q+3} - 1 + \frac{m-q+3}{1} - \frac{(m-q+3)^{2|-1}}{1^{2|1}}\right](q-3)^{rp}$$

$$= -\frac{(m-q+1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}(q-3)^{rp},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die in Klammern eingeschlossenen Facultäten lassen sich nämlich nach der der Gleichung

$$1-s+\frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}-\frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}+\ldots(-1)^x\frac{s^{x|-1}}{1^{x|1}}=(-1)^x\frac{(s-1)^{x|-1}}{1^{x|1}}$$

summiren. Die dem Ereignisse günstige Anzahl ist demnach

$$12.\quad A=m^{rp}-\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}(q-1)^{rp}+\frac{m-q+1}{1}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}(q-2)^{rp}$$
$$-\frac{(m-q+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}(q-3)^{rp}+\frac{(m-q+1)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{m^{m-q+4|-1}}{1^{m-q+4|1}}(q-4)^{rp}-\ldots.$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergehen, oder negativ werden sollte. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$13.\quad w=1-\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left(\frac{q-1}{m}\right)^{rp}+\frac{m-q+1}{1}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left(\frac{q-2}{m}\right)^{rp}$$
$$-\frac{(m-q+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}\left(\frac{q-3}{m}\right)^{rp}+\ldots.$$

oder

$$14.\quad w=1-q\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[\frac{1}{m-q+1}\left(\frac{q-1}{m}\right)^{rp}-\frac{q-1}{m-q+2}\left(\frac{q-2}{m}\right)^{rp}+\frac{(q-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(m-q+3)}\left(\frac{q-3}{m}\right)^{rp}-\ldots.\right].$$

Aus (13.) oder (14.) läfst sich unmittelbar die Wahrscheinlichkeit ableiten, dafs höchstens q verschieden bezeichnete Kugeln in rp Ziehungen erscheinen werden. Es ist $q+1$ statt q zu setzen und das Resultat von der Einheit abzuziehen. Die fragliche Wahrscheinlichkeit ist

$$15.\quad w=\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left(\frac{q}{m}\right)^{rp}-\frac{m-q}{1}\cdot\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left(\frac{q-1}{m}\right)^{rp}+\frac{(m-q)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left(\frac{q-2}{m}\right)^{rp}-\ldots.$$

Die hier gefundenen Gleichungen lösen zugleich Probleme aus der Combinationslehre auf. Werden nämlich die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur (rp)ten Classe gebildet, so giebt die Gleichung (5.) die Anzahl der Gruppen an, in welchen k bestimmte Elemente zugleich und unter diesen jedes wenigstens einmal vorkommt; die Gleichung (10.) giebt die Anzahl der Gruppen, in welchen gerade q verschiedene Elemente, nicht mehr und nicht weniger, vorkommen; die Gleichung (12.) giebt die Anzahl der Gruppen, in welchen wenigstens q verschiedene Elemente vorkommen, und der Zähler in der Gleichung (15.) oder

$$16.\quad A=\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}q^{rp}-\frac{m-q}{1}\cdot\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}(q-1)^{rp}+\frac{(m-q)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}(q-2)^{rp}-\ldots.$$

giebt die Zahl der Gruppen an, in welchen höchstens q verschiedene Elemente erscheinen.

§. 20.

In einer Urne sind m verschieden bezeichnete Kugeln. Man nimmt r Kugeln einzeln, oder auch auf einmal heraus, und legt sie nach der Ziehung in die Urne zurück. Dies Verfahren wird $p$mal wiederholt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen Kugeln nur k bestimmt bezeichneten zugehören werden?

Die Zahl der Fälle, in welchen r Kugeln aus k Kugeln mit bestimmter Bezeichnung erscheinen werden, ist $\frac{k^{r|1}}{1^{r|1}}$. Wird dies Verfahren $p$mal wiederholt, so steigt die Anzahl auf

$$A = \left(\frac{k^{r|-1}}{1^{r|1}}\right)^p = \left(\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\right).$$

Die Zahl aller möglichen Fälle bei $p$maliger Wiederholung ist

$$A_1 = \left(\frac{k^{r|-1}}{1^{r|1}}\right)^p = \left(\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\right)^p.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$1. \quad w = \left[\left(\frac{k}{m}\right)^{r|-1}\right]^p = \left(\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)}\right)^p.$$

Diese Gleichung zeigt an, dafs wenigstens r Kugeln von k bestimmten erscheinen werden. Dabei können gerade r, $r+1$, $r+2$, ... oder alle fraglichen Kugeln erscheinen. Das Erscheinen von einer der übrigen $m-k$ Kugeln ist hiebei ausgeschlossen. Daraus findet sich auch die Wahrscheinlichkeit, dafs keine von k bestimmten Kugeln in p Ziehungen erscheinen werde. Sie ist

$$2. \quad w = \left(\frac{(m-k)(m-k-1)\cdots(m-k-r+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}\right)^p.$$

Zieht man diese Wahrscheinlichkeit von der Einheit ab, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dafs von k bestimmten Kugeln wenigstens r verschiedene ein- oder mehreremal erscheinen werden. Sie ist

$$3. \quad w = 1 - \left[\left(\frac{m-k}{m}\right)^{r|-1}\right]^p.$$

Das Mit-Erscheinen der übrigen $(m-k)$ Kugeln ist in dieser Gleichung nicht wie bei (1.) ausgeschlossen. Hiebei versteht es sich von selbst, dafs $k < m$ sein mufs. Wird $k = 1$ in (3.) gesetzt, so erhält man

$$4. \quad w = 1 - \left(\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-r)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)}\right)^p = 1 - \left(\frac{m-r}{m}\right)^p;$$

Diese Gleichung bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den genannten Bedingungen eine bestimmte Kugel wenigstens einmal erscheinen werde; wobei natürlich andere Kugeln mit erscheinen müssen.

Der Zähler in (3.)

$$5.\quad A = \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \left[\frac{(m-k)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p$$

giebt die Anzahl der Gruppen, in welchen r Elemente aus k bestimmten wenigstens einmal erscheinen, wenn die Verbindungen aus m Elementen zur $r$ten Classe gebildet und die Gruppen dieser Classe $p$mal aneinander gereiht werden.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k bestimmte Kugeln, jede wenigstens einmal erscheinen werden?

Diese Frage läfst sich auf ganz ähnliche Weise wie bei (6.) im vorigen Paragraph beantworten. Von der Zahl der Fälle, in welchen eine bestimmte Kugel wenigstens einmal erschienen ist, läfst sich leicht auf die übergehen, wo k bestimmte Kugeln erscheinen. Es ist zu dem Ende in der Gleichung (5.) $k = 1$ zu setzen und dann der zweite Ausdruck mit k zu vervielfachen. Hiernach ist

$$A_1 = \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - k\left[\frac{(m-k)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p.$$

Durch den zweiten Ausdruck in dieser Darstellung sind zu viele Gruppen ausgeschieden worden. Die Anzahl läfst sich mit unbedeutenden Modificationen aus dem im vorigen Paragraph zu No. 5. angegebenen Schema ermitteln, wenn Verbindungen ohne Wiederholungen statt Versetzungen mit Wiederholungen gesetzt werden. Unter je zwei Kugeln werden die gleichen Kugeln zugleich und dadurch so viele Kugelgruppen zu oft ausgeschieden, als sich $m-2$ Kugeln zur $r$ten Classe, $p$mal wiederholt, gruppiren und k Elemente sich paarweise ordnen und mit ihnen verbinden lassen. Diese Anzahl ist in folgendem Ausdrucke enthalten:

$$\frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(m-2)(m-3)\cdots(m-r-1)}{1\cdot 2\cdots r}\right)^p.$$

Fährt man mit dieser Ausscheidungsweise fort, so ergiebt sich folgende dem Ereignisse günstige Gruppenzahl:

$$6.\quad A = \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{k}{1}\left[\frac{(m-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(m-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\frac{(m-3)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \cdots,$$

oder, wenn man die Darstellung durch Differenzen benutzt:

$$7.\quad A = \Delta^r\left[\frac{(m-k)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$8.\quad w = \left(\frac{m^{r|-1}}{m^{r|-1}}\right)^p - \frac{k}{1}\left[\left(\frac{m-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{m-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\left(\frac{m-3}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \cdots$$

$$= \frac{\Delta^k\left[(m-k)^{r|-1}\right]}{[m^{r|-1}]^p},$$

oder auch in entwickelter Darstellung:

$$9.\quad w = 1 - k\left(\frac{m-r}{m}\right)^p + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^{2|-1}\right]^p - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^{3|-1}\right]^p + \cdots$$

Ist $k = m$, so erhält man aus (8.) und (9.)

$$10.\quad w = \frac{\Delta^m(0^{r|-1})}{[m^{r|-1}]^p} = \frac{\Delta^m((-r+1)^{r|1})^p}{[m^{r|-1}]^p}$$

$$= 1 - m\left(\frac{m-r}{m}\right)^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^{2|-1}\right]^p - \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^{3|-1}\right]^p + \cdots$$

Diese Gleichung bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs alle Kugeln erscheinen werden. Die Reihen (8.), (9.), (10.) brechen ab, wenn ein Glied negativ werden oder in 0 übergehen sollte.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade q verschiedene Kugeln, nicht mehr nicht weniger, erscheinen werden?

Enthielte die Urne nur q verschiedene Kugeln, so ergäbe sich die Zahl der dem Ereignisse günstigen Fälle aus (6.); wenn $m = q$, $k = q$ gesetzt wird. Demnach ist

$$A_1 = \left[\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{q}{1}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \cdots$$

Die Anzahl ist so oft möglich, als aus einer Anzahl von m Kugeln Gruppen gebildet werden können, welche q Kugeln in sich begreifen. Hiernach geht der vorstehende Ausdruck in folgenden über:

$$11.\quad A = \frac{m^{m|-1}}{1^{q|1}1^{m-q|1}}\left[\left[\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{q}{1}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right] - \cdots\right].$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$12.\quad w = \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}}\left[\left[\left(\frac{q}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - q\left[\left(\frac{q-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{q-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \cdots\right]$$

$$= \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot\frac{\Delta^q(0^{r|-1})^p}{[m^{r|-1}]^p}.$$

Die Bedingungen sind noch immer dieselben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens q Kugeln erscheinen werden?

Die Beantwortung dieser Frage beruht darauf, dafs die Anzahl der Fälle bestimmt wird, in welchen gerade q, $q+1$, $q+2$ .... oder m Kugeln erscheinen werden. Setzen wir zu dem Ende allmälig die genannten Werthe statt q in (11.), so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$
\begin{aligned}
A = & \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - m\left[\frac{(m-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(m-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \dots \\
& + m\left\{\left[\frac{(m-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{m-1}{1}\left[\frac{(m-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{(m-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(m-3)^{r|-1}}{1^{r|-1}}\right]^p - \dots\right\} \\
& + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left\{\left[\frac{(m-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{m-2}{1}\left[\frac{(m-3)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{(m-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(m-4)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \dots\right\} \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left\{\left[\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{q}{1}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \dots\right\};
\end{aligned}
$$

denn es kommen nach der Bedeutung der Frage $m-q+1$ Fälle in Betracht. Werden nun die Glieder dieser Reihen in schiefer Richtung zusammengezählt, so ergiebt sich eine ganz ähnliche Reduction, wie bei der Entwicklung der Gleichung (12.) §. 16., und wir erhalten für die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl:

$$
\begin{aligned}
13.\quad A = & \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{(m-q+1)}{1}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p \\
& - \left(\frac{m-q+1}{1}\right)^{2|1}\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}\left[\frac{(q-3)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \dots
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs eintreffen werde, ist

$$
\begin{aligned}
14.\quad w = & 1 - \frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[\left(\frac{q-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \frac{m-q+1}{1}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[\left(\frac{q-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p \\
& - \left(\frac{m-q+1}{1}\right)^{2|1}\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}\left[\left(\frac{q-3}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \dots \\
= & 1 - q\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left\{\frac{1}{m-q+1}\left[\left(\frac{q-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \frac{q-1}{m-q+2}\left[\left(\frac{q-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p \right. \\
& \left. + \frac{(q-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(m-q+3)}\left[\left(\frac{q-3}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \dots\right\}.
\end{aligned}
$$

Zieht man die Gleichung (14.) von der Einheit ab, und erhöht dann q um die Einheit, so ergiebt sich daraus die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den oben genannten Bedingungen höchstens q Kugeln erscheinen werden. Sie ist

$$
\begin{aligned}
15.\quad w = & \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[\left(\frac{q}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \frac{m-q}{1}\cdot\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[\left(\frac{q-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p \\
& + \left(\frac{m-q}{1}\right)^{2|1}\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[\left(\frac{q-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \dots
\end{aligned}
$$

Alle diese Reihen brechen ab, wenn ein Glied in 0 übergehen oder negativ werden sollte.

Die Gleichung (9.) läfst sich, wenn m und $m-r$ nicht unbedeutende Zahlen vorstellen, näherungsweise auf einen kürzeren Ausdruck bringen. Man kann dann nämlich ohne grofse Abweichung vom richtigen Werthe statt der Facultäten Potenzen einführen. Der im Zähler und Nenner der einzelnen Ausdrücke begangene Fehler wird sich durch diese Reduction wieder etwas ausgleichen, besonders auch aus dem Grunde, weil die Perioden der Reihe stark convergiren. Die Gleichung (9.) geht in folgende über:

$$w = 1 - k\left(\frac{m-r}{m}\right)^p + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m-r}{m}\right)^{2p} - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{m-r}{m}\right)^{3p} + \ldots .$$

Diese Reihe fällt mit dem entwickelten Ausdruck des Binomiums $\left[1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^p\right]^k$ zusammen. Demnach ist nahe genau

$$16. \quad w = \left[1-\left(\frac{m-r}{m}\right)^p\right]^k.$$

Die Gleichung zeigt, wie die in ihr vorkommenden Gröfsen von einander abhangen, und wie sie also auseinander abgleitet werden können. Setzt man $w = \frac{s}{t}$, so ist

$$\frac{s}{t} = \left[1-\left(\frac{m-r}{m}\right)^p\right]^k.$$

Hieraus kann die Zahl der Ziehungen gefunden werden, die geschehen müssen, um einen beliebigen Grad von Wahrscheinlichkeit zu erlangen, dafs k bestimmte Kugeln erscheinen werden. Es ist

$$17. \quad p = \frac{\log \sqrt[k]{t} - \log(\sqrt[k]{t} - \sqrt[k]{s})}{\log m - \log(m-r)}.$$

Soll die Zahl von Kugeln angegeben werden, die nöthig ist um irgend einen Grad von Wahrscheinlichkeit zu haben, dafs sie in p Ziehungen erscheinen werden, wenn in jeder Ziehung r Kugeln aus der Urne genommen und nach der Ziehung in dieselbe zurückgelegt werden, so ist

$$18. \quad k = \frac{\log t - \log s}{p \log m - \log[m^p - (m-r)^p]}.$$

Soll endlich die Zahl der Kugeln bestimmt werden, die zusammen in jeder einzelnen Ziehung herausgenommen werden müssen, um bei einer bestimmten Anzahl von Kugeln und einem bestimmten Grade von Wahrscheinlichkeit das

Erscheinen von k bestimmten Kugeln erwarten zu können, so ist

$$19.\quad \log(m-r) = \log m - \frac{\log t}{kp} + \frac{\log(\sqrt[k]{t}-\sqrt[k]{s})}{p},$$

oder auch, da m bekannt ist,

$$20.\quad r = m - p\left[\log m - \frac{\log t}{pk} + \frac{\log(\sqrt[k]{t}-\sqrt[k]{s})}{p}\right].$$

Diese Gleichungen gelten noch immer, wenn m statt k gesetzt wird, oder wenn alle Kugeln in Betracht kommen. Es ist demnach aus (17.)

$$21.\quad p = \log\sqrt[m]{t} - \frac{\log(\sqrt[m]{t}-\sqrt[m]{s})}{\log m - \log(m-r)}.$$

Im Lottospiele kommen bekanntlich 90 Zahlen vor, von denen fünf in jeder Ziehung herausgenommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt werden. Setzt man nun in (21.) $m=90$, $r=5$, und dann $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ statt $\frac{s}{t}$, so ergiebt sich die Zahl der Ziehungen, welche gemacht werden müssen, um die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ zu erlangen, dafs alle Kugeln erscheinen werden. Man kann demnach 1 gegen 1 wetten, oder man kann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten, dafs alle Nummern in 85,77 Ziehungen erscheinen werden; man kann ferner 3 gegen 1, oder mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ wetten, dafs sie in 101 Ziehungen erscheinen werden; endlich kann man 999 gegen 1 oder mit einer Wahrscheinlichkeit 0,999 wetten, dafs sie in 200 Ziehungen erscheinen werden u. s. w.

Besetzt Jemand drei bestimmte Zahlen so oft im Lottospiel, bis er mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten kann, dafs sie erschienen sein werden, so ist $p=27,61$ nach (17.), und es müfste Jemand ungefähr 28mal die nämlichen drei Zahlen besetzen, um 1 gegen 1 auf das Gelingen wetten zu können. Hätte Jemand fünf bestimmte Nummern besetzt, so müfste er ungefähr 41mal (40,66) seinen Satz wiederholen, um 1 gegen 1 auf das Gelingen wetten zu können. Benutzt man die Gleichung (20.) und setzt $k=90$, $p=50$, $s=3$, $t=4$, so ist die Zahl der Kugeln (r), die in jeder Ziehung herausgenommen werden müssen, 11,45, um 3 gegen 1 wetten zu können, dafs in 50 Ziehungen alle 90 Nummern erscheinen werden. Wünscht Jemand zu wissen, wie viele bestimmte Kugeln (k) er wählen mufs, um die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu haben, dafs sämmtliche bestimmte Kugeln in 50 Ziehungen erscheinen werden, so giebt die Rechnung 11,27 für die nöthige Anzahl; nach (18.).

Die hier gefundenen Gleichungen lösen zugleich Probleme aus der Combinationslehre auf. Werden die Verbindungen ohne Wiederholungen zur $r$ten Classe gebildet und dann $p$mal an einander gereiht, so giebt (6.) die Anzahl der Gruppen, in welchen k bestimmte Elemente wenigstens einmal vorkommen; No. 11. giebt die Zahl der Gruppen, in welchen gerade q verschiedene Elemente vorkommen (nicht mehr und nicht weniger); No. 13. giebt die Zahl der Gruppen, in welchen wenigstens q verschiedene Elemente vorkommen. Der Zähler der Gleichung (15.) giebt die Zahl der Gruppen an, in welchen höchstens q verschiedene Elemente erscheinen. Er hat folgende Gestalt:

$$22.\quad A = \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{m-q}{1}\cdot\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{(m-q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \dots$$

Hiermit ist §. 37. meiner Combinationslehre zu vergleichen.

Die in diesem und dem vorhergehenden Paragraph behandelten Probleme gehören, wie man leicht erkennt, zusammen; weswegen sie auch hier zusammengestellt sind. *Euler* hat einige von den in diesem Paragraphen mitgetheilten Gleichungen in „Opusc. analyt. T. II. pag. 337" entwickelt, und nach ihm *Laplace* in seiner „Théor. anal. d. prob. pag. 191." *Euler* hat seine Entwicklungen auf Combinationen gegründet, *Laplace* auf endliche Differenzen. Ersterer hat die Gleichungen (10.) und (14.), letzterer die Gleichungen (8.) und (10.) unter einer andern, aber weniger zweckmäfsigen Form mitgetheilt und dann seine Aufmerksamkeit zwei Anwendungen zugewendet, von welchen die eine auch hier behandelt ist. Die übrigen, in beiden Paragraphen entwickelten Gleichungen finden sich, aufser einem besonderen Falle der Gleichung (17.), in den dort angeführten Werken nicht. Die Frage: wie viele Ziehungen im Lottospiele gemacht werden müssen, um bei einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten zu können, dafs alle Kugeln erscheinen werden, behandelt *Laplace* auf zwei Arten und findet die Zahl der erforderlichen Ziehungen das einemal 85,53, als das von ihm bezeichnete sichere Resultat, das anderemal 85,204. Hier ist 85,77 gefunden. Bei Anwendung der Gleichung (10.) auf den Fall, wenn m eine sehr grofse Zahl bedeutet, legt *Laplace* pag. 198 die Reihe

$$1 - m\left(\frac{m-1}{m}\right)^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-2)^p - \dots = \frac{\Delta 0^p}{m^p}$$

zu Grunde, setzt sie dem Binomium $\left[1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^p\right]^m$ gleich, und macht dabei in so weit eine unrichtige Annahme, dafs er von der Gleichung (10.), also

von der annähernden Reihe

$$1-m\left(\frac{m-r}{m}\right)^p+\frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^2\right]^p-\ldots,$$

die mit dem Binomium $\left[1-\left(\frac{m-r}{m}\right)^p\right]^m$ zusammenfällt (welches ein specieller Fall von No. 16. ist) hätte ausgehen sollen. Hierin liegt wohl auch der Grund der Differenz des hier gefundenen Resultats mit dem von *Laplace* gefundenen (85,204).

Mehrere von den Entwicklungen dieses Paragraphen sind schon früher von mir in diesem Journale mitgetheilt worden. In den Gleichungen (256.) und (257.), welche hierher gehören, sind Unrichtigkeiten stehen geblieben, die nach der Gleichung (14.) dieses Paragraphen zu berichtigen sind.

§. 21.

In einer Urne sind r_1 verschiedene Kugeln, die ein und dasselbe Zeichen haben, r_2 die ein gleiches, aber ein von dem vorigen verschiedenes, r_3 die ein gleiches, aber ein von den vorigen verschiedenes Zeichen tragen u. s. w., endlich, r_m Kugeln, die ein gleiches, aber ein von den früheren verschiedenes Zeichen haben. Man nimmt zwei Kugeln einzeln heraus, und bemerkt ihre Zeichen. Darauf werden p Kugeln einzeln herausgenommen und ihre Zeichen angemerkt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Kugel, welche das Zeichen der erstern trägt, früher erscheinen werde, als eine Kugel, welche das Zeichen der zweiten trägt?

Hier wird vorausgesetzt, dafs die zwei zuerst gezogenen Kugeln verschiedene Zeichen haben. Die zwei Kugel-Arten, denen die gezogenen Kugeln angehören, sollen r_g und r_k heifsen. Die Zahl aller in der Urne enthaltenen Kugeln sei

$$s=r_1+r_2+r_3+r_4+\ldots+r_m.$$

Sind zwei Kugeln gezogen, so werden noch $s-2$ Kugeln in der Urne zurück und von der einen Art r_g-1, von der andern r_k-1 darunter begriffen sein. Die dem Erfolge günstigen Fälle beruhen nun darauf, dafs eine von r_g-1 Kugeln in der ersten, zweiten, dritten, u. s. w., $p$ten Ziehung erscheinen werde, ohne dafs vorher eine Kugel von den beiden fraglichen Kugel-Arten erschienen ist.

Diese Bemerkungen führen zu folgenden Bestimmungen:

a. Eine von r_g-1 Kugeln erscheint in der ersten Ziehung. Die Zahl der günstigen Fälle ist r_g-1. Ihr können die übrigen $s-3$ in der Urne

zurückgelassenen Kugeln in allen möglichen Zusammenstellungen durch $p-1$ Ziehungen folgen. Die Zahl der günstigen Kugelgruppen ist

$$A_0 = (r_g-1)(s-3)^{p-1|-1} = (r_g-1)(s-3)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}.$$

b. Eine von r_g-1 Kugeln erscheint in der zweiten Ziehung. Die Zahl der günstigen Fälle ist r_g-1. Keine von r_g-1 und r_k-1 Kugeln darf in der ersten Ziehung vorausgegangen sein; folgen können alle von $s-4$ in der Urne zurückgelassenen Kugeln in den $p-2$ spätern Ziehungen. Die Zahl der günstigen Kugelgruppen ist

$$A_1 = (s-r_g-r_k)(r_g-1)(s-4)^{p-3|-1}$$
$$= (r_g-1)(s-4)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}.$$

c. Eine von r_g-1 Kugeln erscheint in der dritten Ziehung. Kugeln, welche das Zeichen der einen oder andern Art tragen, dürfen nicht vorhergegangen sein. In den spätern $p-3$ Ziehungen können Kugeln aller Art $s-5$ erscheinen. Die Zahl der günstigsten Fälle ist

$$A_2 = (s-r_g-r_k)^{2|-1}(r_g-1)(s-5)^{p-4|-1}$$
$$= (r_g-1)(s-5)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}.$$

Wird auf diese Weise mit Ermittlung der günstigen Fälle fortgefahren, so ergiebt sich

$$A_3 = (s-r_g-r_k)^{3|-1}(r_g-1)(s-6)^{p-5|-1}$$
$$= (r_g-1)(s-6)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}$$

u. s. w., und endlich

$$A_{p-1} = (s-r_g-r_k)^{p-1|-1}(r_g-1)$$
$$= (r_g-1)(s-p-2)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}.$$

Die Zahl aller dem Erfolge günstigen Fälle ist demnach:

1. $A = (r_g-1)[(s-3)^{p-1|-1} + (s-4)^{p-2|-1}(s-r_g-r_k) + (s-5)^{p-3|-1}(s-r_g-r_k)^{2|-1} + \ldots . (s-r_g-r_k)^{p-1|-1}]$,

oder, anders ausgedrückt:

2. $A = r_g-1)(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k-2|-1}\left[(s-3^{r_g+r_k-3|-1} + (s-4)^{r_g+r_k-3|-1} + \ldots\right.$
$\left.\ldots . (s-p-2)^{r_g+r_k-3|-1}\right]$.

Die Reihe in No. 2., welche in Klammern eingeschlossen ist, läfst sich leicht summiren und man findet:

3. $A = (r_g-1)(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1} \cdot \frac{1}{r_g+r_k-2}\left[(s-2)^{r_g+r_k-2|-1} - (s-p-2)^{r_g+r_k-2|-1}\right]$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn durch die Zahl aller möglichen Gruppen $(s-2)^{p|-1}$ dividirt wird. Sie ist

$$4. \quad w = (r_g - 1)\left[\frac{1}{s-2} + \frac{(s-r_g-r_k)}{(s-2)^{2|-1}} + \frac{(s-r_g-r_k)^{2|-1}}{(s-2)^{3|-1}} + \ldots \frac{(s-r_g-r_k)^{p-1|-1}}{(s-2)^{p|-1}}\right],$$

$$5. \quad w = \frac{r_g-1}{r_g+r_k-2}\left[1 - \frac{(s-p-2)^{r_g+r_k-2|-1}}{(s-2)^{r_g+r_k-2|-1}}\right].$$

Die Gleichung (3.) gilt, so lange $p+2 \overline{\gtrless} r_g + r_k$ ist; wie leicht zu sehen. Werden alle Kugeln gezogen, so geht (5.) über in

$$6. \quad w = \frac{r_g - 1}{r_g+r_k-2}.$$

Was hier von den Kugeln mit dem einen Zeichen gesagt wurde, gilt ebenso von denen mit dem andern. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Kugel mit dem zweiten Zeichen vor einer mit dem ersten Zeichen in p Ziehungen erscheinen werde, ergiebt sich, wenn r_k an die Stelle von r_g tritt. Aus (5.) ist

$$7. \quad w = \frac{r_k - 1}{r_g+r_k-2}\left[1 - \left(\frac{s-p-2}{s-2}\right)^{r_g+r_k-2|-1}\right].$$

Aus (6.) ist

$$8. \quad w = \frac{r_k - 1}{r_g+r_k-2}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch auf andere Art darstellen, wenn die gezogenen zwei Kugeln, oder mehr als diese, aus dem Calcul weggelassen, oder wenn zwei bestimmte Kugel-Arten vor dem Beginne der Ziehungen bezeichnet werden. Nennt man die Zahl der in der Urne befindlichen Kugeln m, die der beiden in Frage stehenden Arten x und y, so ergeben sich folgende Ausdrücke für die angegebenen Wahrscheinlichkeiten:

$$9. \quad w = \frac{x}{x+y}\left[1 - \left(\frac{m-p}{m}\right)^{x+y|-1}\right],$$

$$10. \quad w = \frac{x}{x+y}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus einer Urne, welche s Kugeln von den oben bezeichneten Eigenschaften enthält, eine von r_g bestimmten Kugeln als erste, eine von r_g bestimmten Kugeln als zweite, und dann eine Kugel der ersten Art von einer der zweiten in p nachfolgenden Ziehungen erscheinen werde?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn das in (4.) oder (5.) gefundene Resultat mit der Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln von den genann-

ten Arten und in bestimmter Ordnung als erste und zweite erscheinen zu sehen, verbunden wird. Sie ist

$$11.\quad w = \frac{r_g \cdot r_k (r_g - 1)}{s^{2|-1}(r_g + r_k - 2)}\left[1 - \left(\frac{s-p-2}{s-2}\right)^{r_g + r_k - 2|-1}\right],$$

$$12.\quad w = \frac{r_g \cdot r_k (r_g - 1)}{s^{3|-1}}\left[1 + \frac{s - r_g - r_k}{s-3} + \left(\frac{s - r_g - r_k}{s-3}\right)^{2|-1} + \cdots + \left(\frac{s - r_g - r_k}{s-2}\right)^{p-1|-1}\right].$$

Werden im Ganzen nur p Ziehungen gemacht, so ist in diesen Gleichungen $p-2$ statt p zu setzen.

Die Bedingungen sind wie oben. Drei Kugeln von verschiedenen Zeichen sind erschienen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Kugel, welche das Zeichen der ersten trägt, in p Ziehungen eher als eine, welche das Zeichen der beiden übrigen trägt, erscheinen werde?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich nach Analogie der in $a, b, c \ldots$ gemachten Schlüsse sehr leicht. Nennt man die Zahl der in Frage stehenden Kugel-Arten r_g, r_k, r_h und bemerkt, dafs drei Kugeln zum Voraus gezogen sind, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$13.\quad w = \frac{r_g - 1}{s-3}\left[1 + \frac{s - r_g - r_h - r_k}{s-4} + \left(\frac{s - r_g - r_h - r_k}{s-4}\right)^{2|-1} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \left(\frac{s - r_g - r_h - r_k}{s-4}\right)^{p-1|-1}\right],$$

oder

$$14.\quad w = \frac{r_g - 1}{r_g + r_h + r_k - 3}\left[1 - \left(\frac{s-p-3}{s-3}\right)^{r_g + r_h + r_k - 3|-1}\right].$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht verallgemeinern, wenn mehr als drei, etwa q Kugel-Arten in Betracht kommen. Es ist

$$15.\quad w = \frac{(r_d - 1)}{s-q}\left[1 + \left(\frac{s-n}{s-q-1}\right) + \left(\frac{s-n}{s-q-1}\right)^{2|-1} + \cdots + \left(\frac{s-n}{s-q-1}\right)^{p-1|-1}\right],$$

oder

$$16.\quad w = \frac{r_d - 1}{n-q}\left[1 - \left(\frac{s-p-q}{s-q}\right)^{n-q|-1}\right].$$

Hier ist

$$n = r_d + r_e + r_f + \cdots + r_k$$

und q enthält so viele Einheiten, als verschiedene Kugel-Arten vorkommen, oder die Gröfsen r_d, r_e, r_f, $\cdots$ r_k angeben, wenn jede von ihnen als Einheit betrachtet wird.

Sind noch keine Kugeln gezogen, und werden q verschiedene Kugel-Arten angenommen, deren Erscheinen in bestimmter Ordnung vorkommen soll und

fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dafs in $p+q$ Ziehungen eine Kugel von der Art, welche r_d Kugeln enthält, vor einer Kugel der übrigen Arten erscheinen werde, so ist aus (16.)

$$17. \quad w = \frac{r_d \cdot r_e \cdots r_k (r_d - 1)}{s^{q|-1}(n-q)}\left[1-\left(\frac{s-p-q}{s-q}\right)^{n-q|-1}\right].$$

Hier gelten die nemlichen Bedingungsgleichungen wie in (16.).

Die hier gefundenen Gleichungen werden einfacher, wenn alle Arten gleich viel Kugeln zählen, also $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = r_m = r$ ist. In diesem Fall geht s in rm, n in qr über und in (15.) und (16.) wird

$$18. \quad w = \frac{r-1}{rm-q}\left[1+\frac{rm-qr}{rm-q-1}+\left(\frac{rm-qr}{rm-q}\right)^{2|-1}+\cdots+\left(\frac{rm-qr}{rm-q-1}\right)^{p-1|-1}\right],$$

$$19. \quad w = \frac{r-1}{qr-q}\left[1-\left(\frac{rm-q-p}{rm-q}\right)^{qr-q|-1}\right].$$

Aus (17.) wird

$$20. \quad w = \frac{r^q}{(rm)^{q|-1}q}\left[1-\left(\frac{rm-q-p}{rm-q}\right)^{qr-q|-1}\right].$$

Kommen nur zwei Kugel-Arten in Betracht, so ist aus (19.) und (20.), unter den dazu gehörigen Bedingungen,

$$21. \quad w = \tfrac{1}{2} - \frac{(rm-p-2)^{2r-2|-1}}{2(rm-2)^{2r-2|-1}},$$

$$22. \quad w = \frac{r}{2m(rm-1)}\, 1-\left[\left(\frac{rm-p-2}{rm-2}\right)^{2r-2|-1}\right].$$

Fragt man aber, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs überhaupt q Kugeln von verschiedenen Zeichen zuerst, und dann in den p folgenden Ziehungen eine Kugel mit einem bestimmten Zeichen vor denen der übrigen erscheinen werde, so ist diese Wahrscheinlichkeit nach der Gleichung (17.), unter den vorhin angegebenen Bedingungen,

$$23. \quad w = \frac{rm\; r^{q-1}(m-1)^{q-1|-1}}{(rm)^{q|-1}\cdot q}\left[1-\left(\frac{rm-q-p}{rm-q}\right)^{qr-q|-1}\right].$$

Kommen nur zwei Kugel-Arten in Betracht, so ist $q=2$ und es wird aus (23.)

$$24. \quad w = \frac{(m-1)r}{2(mr-1)}\left[1-\left(\frac{rm-p-2}{rm-2}\right)^{2r-2|-1}\right].$$

Werden alle Kugeln gezogen, so ist

$$25. \quad w = \frac{(m-1)r}{2(mr-1)}.$$

In einer Urne sind r_1 Kugeln, die ein- und dasselbe Zeichen tragen; r_2 die ein gleiches, aber von den vorigen verschiedenes u. s. w., r_m die ein

und dasselbe, aber von den vorigen verschiedenes Zeichen tragen. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus und legt jede nach der Ziehung in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine von r_g bestimmten Kugeln früher als eine von r_k bestimmten Kugeln erscheinen werde?

Die Bestimmung der fraglichen Wahrscheinlichkeit beruht ganz auf den gleichen Bedingungen, wie die unter a, b, c, ... angegebenen, jedoch mit dem Unterschiede, dafs hier, wegen des Zurückwerfens der gezogenen Kugeln, die Zahl der in der Urne befindlichen Kugeln nicht geändert wird. Deswegen kommen die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen in Betracht, statt dafs bisher die Gruppen der Versetzungen ohne Wiederholungen in Betracht kamen. Es treten daher in den Calcul Potenzen statt Facultäten ein. Behalten wir also die angenommene Bezeichnung bei, so ist die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl:

$$26.\quad A = r_g[s^{p-1} + (s-r_g-r_k)\cdot s^{p-2} + (s-r_g-r_k)^2\cdot s^{p-3} + \cdots + (s-r_g-r_k)^{p-1}]$$
$$= r_g \frac{s^p - (s-r_g-r_k)^p}{r_g+r_k},$$

wenn die bekannte Gleichung

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b} = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \cdots + b^m$$

zu Hülfe genommen wird. Wird durch s^p dividirt, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$27.\quad w = \frac{r_g}{r_g+r_k}\left[1-\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^p\right].$$

Die Bedingungen sind wie oben. Noch ist keine Kugel gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die erste Kugel ein bestimmtes Zeichen r_g, die zweite ein anderes r_k tragen und dafs dann eine Kugel des ersten Zeichens früher, als eine des zweiten in p nachfolgenden Ziehungen erscheinen werde?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich nach dem Bisherigen leicht. Sie ist

$$28.\quad w = \frac{r_g^2\cdot r_k}{s^2(r_g+r_k)}\left[1-\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^p\right].$$

Die bisherigen Schlüsse lassen sich leicht verallgemeinern. Kommen q bestimmte Kugel-Arten unter den oben aufgestellten Bedingungen in Betracht, so ist aus (27. und 28.) allgemein

$$29.\quad w = \frac{r_d}{r_d + r_e + \cdots + r_k}\left[1 - \left(\frac{s - r_d - r_e - \cdots - r_k}{s}\right)^p\right].$$

$$30.\quad w = \frac{r_d^2 \cdot r_e \cdot r_f \cdots r_k}{s^q (r_d + r_e + \cdots + r_k)}\left[1 - \left(\frac{s - r_d - r_e - \cdots - r_k}{s}\right)^p\right].$$

Ist die Anzahl der verschiedenen Kugel-Arten gleich, so ergeben sich folgende einfachere Ausdrücke aus (29.) und (30.):

$$31.\quad w = \frac{1}{q}\left[1 - \left(\frac{mr - qr}{mr}\right)^p\right],$$

$$32.\quad w = \frac{1}{qm}\left[1 - \left(\frac{m - q}{m}\right)^p\right].$$

Hierin bezeichnet q so viele Einheiten, als Kugel-Arten in Betracht kommen, oder als die Gröfsen r_d, r_e, $\cdots$ r_k enthalten, wenn jede als Einheit betrachtet wird.

Die Gleichungen (27. bis 32.) geben noch zu weitern, nicht unwichtigen Folgerungen Anlafs. Ist p eine grofse Zahl, oder werden die Ziehungen lange fortgesetzt, so wird der Werth des in den Klammern eingeschlossenen Bruches so klein, dafs er vernachlässigt werden kann. Vergleicht man dann die Wahrscheinlichkeiten, welche dem Erscheinen der Kugeln einzelner Arten zugehören, mit einander, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung aus (29.):

$$33.\quad w_g = \frac{r_g}{r_d + r_e + \cdots + r_k},$$

$$w_h = \frac{r_h}{r_d + r_e + \cdots + r_k}$$

u. s. w. Hieraus entnehmen wir Folgendes. Sind in einer Urne m verschiedene Kugel-Arten von der oben angeführten Beschaffenheit enthalten, werden viele Ziehungen gemacht, wird jede gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt, und kommen dabei q Kugeln in Betracht, so sind die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen bestimmter Kugel-Arten bei unbegrenzter Fortsetzung der Ziehungen beinahe derjenigen gleich, welche das Erscheinen dieser Kugeln in der ersten Ziehung hat, wenn nur q bestimmte Kugel-Arten in Betracht kommen; oder sie nähern sich diesen einfachen Wahrscheinlichkeiten immer mehr und mehr, ohne ihnen je vollkommen gleich zu werden.

Vergleicht man endlich die Wahrscheinlichkeiten, oder die Zahl der Fälle, welche angeben, in welchem Verhältnisse die fraglichen Kugel-Arten beziehungsweise unter einander erscheinen werden, so ergiebt sich leicht aus den Gleichungen (27. 29. und 30.):

12*

34. $w_g : w_h : w_k : \cdots\cdots = A_g : A_h : A_k : \cdots\cdots = r_g : r_h : r_k : \cdots\cdots$

Das heifst: die Zahl der Fälle, oder die Wahrscheinlichkeiten, welche das wiederholte Erscheinen bestimmter Kugel-Arten bei unbegrenzter oder auch begrenzter Fortsetzung der Ziehungen angeben, steht mit den zugehörigen Kugel-Anzahlen in geradem Verhältnisse.

Betrachtet man die Kugel-Anzahlen als die Ursachen der aus ihnen hervorgehenden Erscheinungen, so stellt sich, wenn man von letztern ausgeht, der vorstehende Satz so dar.

35. Das Eintreffen von Erscheinungen steht bei häufigen Wiederholungen in geradem Verhältnifs mit den Ursachen, durch welche die Erscheinungen hervorgebracht werden.

§. 22.

In einer Urne befinden sich m verschiedene Kugel-Arten. r_1 Kugeln tragen ein und dasselbe Zeichen, r_2 ein und dasselbe, aber von dem vorigen verschiedenes Zeichen u. s. w. Man zieht p Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogene Kugel in die Urne zurückzulegen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k Kugeln von einem bestimmten Zeichen r_g früher als die von einem bestimmten Zeichen r_k erscheinen werden?

Das Ereignifs kann entweder in k, oder in $k+1$, oder in $k+2$ ersten Ziehungen u. s. w., oder endlich in p möglichen Ziehungen eintreffen. Dabei ist nothwendige Bedingung, dafs keine von r_k Kugeln in den genannten Ziehungen erscheine. Dies führt zu folgenden Bestimmungen.

a. Die Zahl der Fälle, welche dem Erscheinen von k Kugeln von einem bestimmten Zeichen in den ersten k Ziehungen günstig sind, wird durch $r^{k|-1}$ bestimmt. In den $p-k$ folgenden Ziehungen kann jede beliebige Zusammenstellung aus allen übrigen Kugeln folgen. Nennt man die Zahl aller in der Urne vorhandenen Kugeln, wie im vorigen Paragraph, s, so ist die dem Erfolge in diesem Falle günstige Gruppen-Anzahl

$$A_0 = r_g^{k|-1}(s-k)^{p-k|-1}.$$

b. k Kugeln von bestimmtem Zeichen erscheinen in den ersten $k+1$ Ziehungen. Eine Kugel, welche eines der übrigen, nicht in Frage stehende Zeichen trägt, kann darunter vorkommen. Sie darf aber nicht an der letzten Stelle erscheinen. Erschiene sie nemlich als $k+1$te Kugel, so würde dieser Fall mit den unter a bezeichneten zusammenfallen. In den nachfolgenden $p-k-1$ Ziehungen kann jede mögliche Kugelgruppe auftreten. Die Zahl der

in diesem Falle begriffenen günstigen Kugelgruppen ist

$$A_1 = k \cdot r_g^{k|-1}(s - r_g - r_k)(s - k - 1)^{p-k-1|-1}.$$

c. k Kugeln von bestimmtem Zeichen erscheinen in den $k+2$ ersten Ziehungen. Dies läfst zu, dafs zwei Kugeln, welche nicht die fraglichen Zeichen tragen, zugleich in diesen Ziehungen erscheinen. Keine dieser zwei Kugeln darf in der $k+2$ten Ziehung erscheinen, weil dieser Fall schon in (*b.*) vorhergesehen ist. Hierdurch wird die Zahl der Gruppen um so viele vermehrt, als zwei Kugeln von den übrigen Zeichen durch $k+1$ Fächer, oder, was dasselbe ist, als $k-1$ Kugeln in $k+1$ Fächer zerstreut werden können. In den nachfolgenden $p-k-2$ Ziehungen kann jede mögliche Kugelgruppe vorkommen. Die Zahl der hierdurch bedingten günstigen Fälle ist

$$A_2 = \frac{(k+1)k}{1 \cdot 2} r_g^{k|-1}(s - r_g - r_k)^{2|-1}(s - k - 2)^{p-k-2|-1}$$

$$= \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1} r_g^{k|-1}(s - r_g - r_k)^{2|-1}(s - k - 2)^{p-k-2|-1}.$$

Führt man diese Schlüsse weiter fort, so erhält man folgende Gesammtzahl der günstigen Kugelgruppen:

$$1. \quad A = r_g^{k|-1}\Big[(s-k)^{p-k|-1} + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}(s - r_g - r_k)(s - k - 1)^{p-k-1|-1}$$
$$+ \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}(s - r_g - r_k)^{2|-1}(s-k-2)^{p-k-2|-1} + \dots + \left(\frac{p-k-1}{1}\right)^{k-1|1}(s - r_g - r_k)^{p-k|-1}\Big];$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$2. \quad w = \frac{r_g^{k|-1}}{s^{k|-1}}\Big[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1} \cdot \frac{s - r_g - r_k}{s-k} + \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k}\right)^{2|-1}$$
$$+ \left(\frac{4}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k}\right)^{3|-1} + \dots + \left(\frac{p-k-1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k}\right)^{p-k|-1}\Big].$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Ziehung eine Kugel, welche zur Art r_g gehört, in der zweiten eine, welche zu r_k gehört, erscheinen, und dafs in den p folgenden Ziehungen k Kugeln von der ersten Art früher als von der zweiten Art erscheinen werden?

Aus den unter *a, b, c,* .... und zu (11. und 12.) im vorigen Paragraph gemachten Bemerkungen ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit leicht. Sie ist

$$3. \quad w = \frac{r_g \cdot r_k (r_g - 1)^{k|-1}}{s^{k+2|-1}}\Big[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s - r_g - r_k}{s-k-2} + \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k-2}\right)^{2|-1} + \dots$$
$$\dots + \left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k-2}\right)^{p-k|-1}\Big].$$

Die Gleichungen (2. und 3.) lassen sich leicht verallgemeinern und auf q verschiedene Kugel-Arten ausdehnen. Durch Verbindung der unter $a, b, c, \ldots$ und zu (15. und 17.) im vorigen Paragraph gemachten Bemerkungen ergeben sich aus (2. und 3.) dieses Paragraphen folgende Bestimmungen:

$$4.\quad w = \frac{r^{k|-1}}{s^{k|-1}}\left[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s-k}\right) + \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s-k}\right)^{2|-1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s-k}\right)^{p-k|-1}\right],$$

$$5.\quad w = \frac{r_d \cdot r_e \cdots r_k \cdot (r_d-1)^{k|-1}}{s^{k+q|-1}}\left[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s-n}{s-k-q} + \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|-1}\left(\frac{s-n}{s-k-q}\right)^{2|-1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s-k-q}\right)^{p-k|-1}\right].$$

In beiden Gleichungen ist

$$n = r_d + r_e + r_f + \ldots + r_k,$$

und q enthält so viele Einheiten als Kugel-Arten in Frage stehen, oder als man erhält, wenn jede der Gröfsen r_d, r_e, r_f, ... r_k als Einheit betrachtet wird.

Die Bedingungen sind dieselben, wie oben. Man zieht p Kugeln einzeln heraus und legt die gezogenen Kugeln in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k Kugeln von einem bestimmten Zeichen r_g früher als von einem andern r_k erscheinen werden?

Bei Bestimmung der dem Erfolge günstigen Fälle treten die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen statt der ohne Wiederholungen auf. Es sind daher die unter $a, b, c, \ldots$ gemachten Schlüsse und die zu (26.) im vorigen Paragraph gemachten Bemerkungen anzuwenden. Geschieht dies, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$6.\quad w = \frac{r_g^k}{s^k}\left[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s-r_g-r_k}{s} + \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^3 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^{p-k}\right].$$

Fragt man, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs in der ersten Ziehung eine Kugel von der Art r_g, in der zweiten eine von der Art r_k, und in den folgenden Ziehungen k Kugeln der ersten Art früher erscheinen werden, als die der andern, so ist

$$7.\quad w = \frac{r_g^{k+1} \cdot r_k}{s^{k+2}}\left[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right) + \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^{p-k}\right].$$

Die Gleichungen (6. und 7.) führen durch weitere Verfolgung des Gesagten zu folgender allgemeinen Gleichung, wenn q verschiedene Kugel-Arten in Betracht kommen:

$$8.\quad w=\frac{r_g^k}{s^k}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s-n}{s}+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s}\right)^{p-k}\right],$$

$$9.\quad w=\frac{r_d^{k+1}\cdot r_e\cdot r_f\cdots r_k}{s^{k+q}}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s-n}{s}+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s}\right)^2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s}\right)^{p-k}\right].$$

Hier gelten die nämlichen Bedingungsgleichungen, die zu (5.) angegeben wurden. Die Anwendung der in diesem Paragraph aufgestellten Gleichungen auf specielle Fälle ergiebt sich leicht. Die hier gefundenen Gleichungen sind allgemeiner, als die im vorigen Paragraph. Die Gleichungen, welche zur Bestimmung der Gruppen-Anzahlen aufgestellt wurden, beantworten zugleich Probleme aus der Combinationslehre.

Werden nämlich die Versetzungen ohne Wiederholungen aus Reihen gebildet, deren Elemente den oben angegebenen Gesetzen unterliegen, so giebt die Gleichung (1.) die Zahl der Gruppen an, in welchen k Elemente einer bestimmten Stellenzahl früher erscheinen, als ein Element einer andern bestimmten Stellenzahl.

Soll die Zahl der Gruppen von der nämlichen Eigenschaft bestimmt werden, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen gebildet werden, so erhalten wir durch den Zähler von (6.) folgenden Ausdruck:

$$10.\quad r_g^k\left[s^{p-k}+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}(s-r_g-r_k)s^{p-k-1}+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}(s-r_g-r_k)^2 s^{p-k-2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}(s-r_g-r_k)^{p-k}\right].$$

Die Zähler der Gleichungen (3. 4. 5. und 7. 8. 9.) beantworten gleichfalls Probleme aus der Combinationslehre, deren Bedeutung hiernach leicht anzugeben ist.

23.

Wir wenden uns nun zur nähern Betrachtung eines besondern Falles der im vorigen Paragraph entwickelten Gleichung (6.), welchen wir aber in veränderter Gestalt geben.

Jemand trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$, das Nicht-Eintreffen durch $\frac{b}{m}=\frac{m-a}{m}$ aus-

gedrückt wird, durch p Wiederholungsversuche gerade $r$mal herbeizuführen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sein Unternehmen gelingen werde?

Das Gelingen des Unternehmens beruht darauf, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal, und also das Gegentheil $p-r$mal eintreffe. Jede Anordnung, nach der beide Ereignisse sich aneinanderreihen, ist zulässlich. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$1. \quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{a^r b^{p-r}}{m^p} = \frac{p^{p-r|-1}}{1^{p-r|1}} \cdot \frac{a^r b^{p-r}}{m^p}.$$

Jemand unternimmt unter den angegebenen Bedingungen, ein Ereignifs in p Versuchen wenigstens $r$mal herbeizuführen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Unternehmen gelingen werde?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit beruht darauf, dafs das Unternehmen entweder $r$mal, oder $r+1$mal, oder $r+2$mal, u. s. w., oder endlich $p$mal in p Versuchen eintreffen werde. Setzt man daher in (1.) allmälig r, $r+1$, $r+2$, ... p statt r und zählt die erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich:

$$2. \quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{a^r b^{p-r}}{m^p} + \frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} \cdot \frac{a^{r+1} b^{p-r-1}}{m^p} + \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} \cdot \frac{a^{r+2} b^{p-r-2}}{m^p} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{a^{p-1} b}{m^p} + \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{a^p}{m^p}.$$

Die Anzahl der in der Reihe vorkommenden Glieder ist $p-r+1$. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, oder diejenige, dafs das fragliche Ereignifs höchstens $r-1$mal eintreffen werde, ist

$$3. \quad w = \frac{b^p}{m^p} + \frac{p}{1} \cdot \frac{b^{p-1} a}{m^p} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{b^{p-2} a^2}{m^p} + \cdots + \frac{p^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot \frac{b^{p-r+1} a^{r-1}}{m^p}.$$

Sie wird gefunden, wenn man in (1.) allmälig 0, 1, 2, ... $r-1$ statt r setzt. Die Gleichungen (2.) und (3.) enthalten die Glieder des Binomiums $\left(\frac{a+b}{m}\right)^p$, die sich zur Einheit ergänzen, da nach der Annahme $a+b=m$ ist.

Eine andere Auflösung des zweiten Problems ergiebt sich auf folgende Weise. Das Unternehmen gelingt in den r, oder $r+1$, oder $r+2$ ersten Versuchen, oder endlich in p Versuchen. Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen.

a. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es in den r ersten Versuchen gelingen werde, ist

$$w_1 = \frac{a^r}{m^r}.$$

b. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es in den $r+1$ ersten Versuchen gelingen werde, setzt voraus, dafs einmal das Gegentheil, aber in einem der r ersten Versuche eintreffen werde. Träfe das Gegentheil im $r+1$ten Versuche ein, so würde dies mit dem Falle in (*a.*) übereinkommen. Die hieraus sich ergebende Wahrscheinlichkeit ist

$$w_2 = r\frac{a^r}{m^r}\cdot\frac{b}{m} = \frac{2^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{a^r b}{m^{r+1}}.$$

c. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es in den $r+2$ ersten Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das Gegentheil zweimal, aber nicht im $r+2$ten Versuche eintreffen werde, weil dieser Fall unter b vorgesehen ist. Das Gegentheil kann in den $k+1$ vorhergehenden Versuchen auf jede beliebige Weise eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$w_3 = \frac{(r+1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{a^r b^2}{m^r\cdot m^2} = \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1}\frac{a^r b^2}{m^{r+2}}.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so führen sie zu folgendem Ausdrucke der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$4.\quad w = \frac{a^r}{m^r}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b}{m}+\left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b^2}{m^2}+\left(\frac{4}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b^3}{m^3}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{p-r+1}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b^{p-r}}{m^{p-r}}\right].$$

Diese Gleichung ist ein besonderer Fall der Gleichung (6. §. 22.), wenn dort $r_g = a$, $r_k = b$, $s = r_g + r_k$ gesetzt und das Erscheinen einer Kugel, welche das Zeichen von r_k Kugeln trägt, nicht wie dort geschah ausgeschlossen, sondern angenommen wird.

Die in den Klammern eingeschlossene Reihe in (4.) läfst sich nach No. 462. §. 96. m. „aufsteigenden Functionen" und §. 101. u. ff. m. „Differenz. Calculs" auf folgende Form bringen:

$$5.\quad w = \left(\frac{p-r+1}{1}\right)^{r|1}\left(\frac{a}{m}\right)^r\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\frac{1}{\left(\frac{b}{m}-1\right)^r}\left[\frac{r}{p}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-1}-\frac{r-1}{1}\cdot\frac{r}{p-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-2}\right.$$
$$\left.+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{r}{p-2}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-3}-\cdots(-1)^{r-1}\frac{r}{p-r+1}\right](-1)^r\frac{1}{\left(\frac{b}{m}-1\right)^r}\left(\frac{a}{m}\right)^r.$$

Wird hierin $\left(\frac{b}{m}-1\right)^r = \left(\frac{b-m}{m}\right)^r = (-1)^r\left(\frac{m-b}{m}\right)^r = (-1)^r\left(\frac{a}{m}\right)^r$ gesetzt, womit die Prämissen der Aufgabe stimmen, so geht (5.) über in

$$6.\quad w = 1(-1)^r\left(\frac{p-r+1}{1}\right)^{r|1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\frac{r}{p}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-1} - \frac{r-1}{1}\cdot\frac{r}{p-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-2} + \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{r}{p-2}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-3} \dots (-1)^{r-1}\frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{r}{p-r+1}\right].$$

Wird $(-1)^{r-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}$ in die Klammern gebracht, so geht die Gleichung (6.) in folgende über:

$$7.\quad w = 1 - \frac{r^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot r\left[\frac{b^{p-r+1}}{(p-r+1)m^{p-r+1}} - \frac{r-1}{1}\cdot\frac{b^{p-r+2}}{(p-r+2)m^{p-r+2}} + \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{b^{p-r+3}}{(p-r+3)m^{p-r+3}} - \dots (-1)^{r-1}\frac{b^p}{p\cdot m^p}\right].$$

Setzt man endlich hierin $\frac{b}{m} = x$, so geht (7.) über in

$$8.\quad w = 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\, r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\,\partial x.$$

Integrirt man (8.) nach der bekannten Formel

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+pn} + \frac{pna}{m+pn}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\,\partial x$$

und setzt nach der Integration die gehörigen Werthe, und $x = \frac{b}{m}$, $1-x = \frac{a}{m}$ so ergiebt sich

$$9.\quad w = 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r\,b^{p-r+1}}{p\,m^{p-r+1}}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^{r-1} + \frac{r-1}{p-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-2} + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-3} + \dots \dots + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{r-1|-1}\right].$$

Diese Gleichung läfst sich gut benutzen, wenn p im Verhältnifs zu r eine sehr grofse Zahl bedeutet; denn die Glieder der Reihe werden stark convergiren, und einige werden hinreichen, um den Werth der gesuchten Wahrscheinlichkeit zu finden.

Aus (7. 8. und 9.) ergiebt sich auch, wenn die gefundenen Ausdrücke von der Einheit abgezogen werden, für den Werth der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit, nämlich, dafs das fragliche Ereignifs höchstens $r-1$mal in p Versuchen eintreffen werde:

$$10.\quad w_1 = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\, r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\,\partial x$$

$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\, r\left[\frac{b^{p-r+1}}{(p-r+1)m^{p-r+1}} - \frac{r-1}{p-r+2}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+2} + \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(p-r+3)}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+3} \dots \dots (-1)^{r-1}\left(\frac{b}{m}\right)^p\right]$$

$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r}{p}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^{r-1} + \frac{r-1}{p-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-2} + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-3} + \dots \dots + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{r-1|-1}\right].$$

Vergleicht man die Ausdrücke (7. bis 9.) mit (2. 10. und 5.), so ergeben sich daraus, da sie dieselben Begriffe ausdrücken, folgende Formeln:

$$11.\quad w = \left(\frac{a}{m}\right)^p + \frac{p}{1}\cdot\frac{a^{p-1}b}{m^p} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{a^{p-2}b^2}{m^p} + \ldots + \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{a^r b^{p-r}}{m^p}$$

$$= 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\, r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\,\partial x$$

$$= 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r\,b^{p-r+1}}{m^{p-r+1}}\left[\frac{1}{p-r+1} - \frac{r-1}{1}\cdot\frac{b}{(p-r+2)m} + \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{b^2}{(p-r+3)m^2} - \ldots\right],$$

$$12.\quad w_1 = \frac{b^p}{m^p} + \frac{p}{1}\cdot\frac{b^{p-1}a}{m^p} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{b^{p-2}a^2}{m^p} + \ldots + \frac{p^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{b^{p-r+1}a^{r-1}}{m^p}$$

$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\, r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\,\partial x$$

$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\, r\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\frac{1}{p-r+1} - \frac{(r-1)b}{(p-r+2)m} + \frac{(r-1)^{2|-1}b^2}{1^{2|1}(p-r+3)m^2} - \frac{(r-1)^{3|-1}b^3}{1^{3|1}(p-r+4)m^3} + \ldots\right].$$

Setzt man nun, in (12.) a statt b und b statt a, und zugleich $p-r=s$, also $r=p-s$, so folgt daraus

$$13.\quad w_1 = \frac{a^p}{m^p} + \frac{p}{1}\cdot\frac{a^{p-1}b}{m^p} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{a^{p-2}b^2}{m^p} + \ldots + \frac{p^{p-s-1|-1}\cdot a^{s+1}b^{p-s-1}}{1^{p-s-1|1}m^p}$$

$$= \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}(p-s)\int x^s(1-x)^{p-s-1}\,\partial x$$

$$= \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}(p-s)\frac{a^{s+1}}{m^{s+1}}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{(p-s-1)a}{(s+2)m} + \frac{(p-s-1)^{2|-1}a^2}{1^{2|1}(s+3)m^2} - \ldots\right]$$

$$= \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}\left(\frac{p-s}{p}\right)\frac{a^{s+1}}{m^{s+1}}\left[\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-1} + \frac{p-s-1}{p-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-2} + \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-3} + \ldots\right].$$

Nach der Integration ist nämlich $x=\frac{a}{m}$ und $1-x=\frac{b}{m}$ gesetzt. Die Ausdrücke in (12.) bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch $\frac{a}{m}$ bedingt ist, wenigstens $s+1$mal in p Versuchen eintreffen werde. Verbindet man (13. und 11.) miteinander, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Ereignifs wenigstens $r$mal und höchstens $s$mal in p Versuchen eintreffen werde. Für diesen Fall ist (13.) von (11.) abzuziehen. Es findet sich

$$14.\quad w = \frac{p^{p|-1}}{1^{p-s|1}1^{s|1}}\cdot\frac{a^s b^{p-s}}{m^p} + \frac{p^{p|-1}}{1^{p-s+1}1^{s-1|1}}\cdot\frac{a^{s-1}b^{p-s+1}}{m^p} + \cdots + \frac{p^{p|-1}}{1^{r|1}1^{p-r|1}}\cdot\frac{a^r b^{p-r}}{m^p}$$

$$= 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} r \int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\partial x - \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}(p-s)\int y^s(1-y)^{p-s-1}\partial y$$

$$= 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r}{1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\frac{1}{p-r+1} - \frac{(r-1)b}{(p-r+2)m} + \frac{(r-1)^{2|-1}b^2}{1^{2|1}(p-r+3)m^2} - \cdots\right]$$

$$- \frac{p^{-s|-1}}{1^{p-s|1}}(p-s)\left(\frac{a}{m}\right)^{s+1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{(p-s-1)a}{(s+2)m} + \frac{(r-1)^{2|-1}a^2}{1^{2|1}(s+3)m^2} - \cdots\right].$$

Wird integrirt und dann $x = \frac{b}{m}$, $1-x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{a}{m}$, $1-y = \frac{b}{m}$ gesetzt, so ist auch

$$15.\quad w = 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r}{p}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^{r-1} + \frac{r-1}{p-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-2} + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-3} + \cdots\right]$$

$$- \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}\cdot\frac{p-s}{p}\left(\frac{a}{m}\right)^{s+1}\left[\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-1} + \frac{p-s-1}{p-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-2} + \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-3} + \cdots\right].$$

Die eben gefundene Wahrscheinlichkeit läfst sich auch noch auf eine andere Art mit Hülfe der Gleichungen (7. bis 9.) ausdrücken. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, dafs das genannte Ereignifs wenigstens $(s+1)$mal in p Versuchen eintreffen werde, aus einer dieser Gleichungen darzustellen und dann das erhaltene Resultat von der bezüglichen Gleichung selbst abzuziehen. Dies geschieht, wenn $s+1$ statt r gesetzt wird. Es ergiebt sich

$$16.\quad w = \frac{p^{s+1|-1}}{1^{s+1|1}}(s+1)\int x^{p-s-1}(1-x)^s\partial x - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\partial x.$$

Aus der Gleichung (15.) läfst sich nun leicht beweisen, dafs durch die Annahme von p, bei bestimmten Werthen von r und s, die Wahrscheinlichkeit, ein Ereignifs wenigstens r und höchstens $s$mal durch wiederholte Versuche herbeizuführen, bis zu jedem, der Gewifsheit beliebig sich nähernden Grade gesteigert werden kann. Der Gleichung (15.) läfst sich folgende Form geben:

$$17.\quad w = 1 - \frac{p^{p|-1}}{1^{r|1}1^{p-r|1}}\cdot\frac{b^{p-r+1}a^{r-1}}{m^p}\cdot\frac{r}{p}\left[1 + \frac{r-1}{p-1}\cdot\frac{m}{a} + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \cdots \cdots + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{r-1|-1}\left(\frac{m}{a}\right)^{r-1}\right]$$

$$- \frac{p^{p|-1}}{1^{p-s|1}1^{s|1}}\cdot\frac{a^{s+1}b^{p-s-1}}{m^p}\cdot\frac{p-s}{p}\left[1 + \frac{p-s-1}{p-1}\cdot\frac{m}{b} + \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \cdots \cdots + \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{p-s-1}\left(\frac{m}{b}\right)^{p-s-1}\right]$$

$$= 1 - A - B.$$

Nun ist, wie leicht zu sehen,

$$\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{x|-1} < \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{x} \quad \text{und} \quad \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{x|-1} < \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{x},$$

also ist der Werth der ersten Reihe in (17.) (A) kleiner als

$$18. \quad D = \frac{p^{p|-1}}{1^{r|1} \cdot 1^{p-r|1}} \cdot \frac{b^{p-r+1} \cdot a^{r-1}}{m^p} \cdot \frac{r}{p} \cdot \frac{1-\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^r \left(\frac{m}{a}\right)^r}{1-\frac{r-1}{p-1} \cdot \frac{m}{a}}.$$

Was nun auch r, a und b bedeuten mögen, so läfst sich p so annehmen, dafs der Werth des Ausdrucks

$$\frac{b \cdot r}{a \cdot p} \cdot \frac{1-\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^r \left(\frac{m}{a}\right)^r}{1-\frac{r-1}{p-1} \cdot \frac{m}{a}}$$

kleiner als die Einheit bleibt, oder sie höchstens erreicht. Demnach kann der Werth von D kleiner oder höchstens so grofs als

$$\frac{p^{p|-1}}{1^{r|1} \cdot 1^{p-r|1}} \cdot \frac{a^r b^{p-r}}{m^p}$$

werden. Dieser Ausdruck ist ein Glied des Binomiums $\left(\frac{a+b}{m}\right)^p = 1$, dessen Werth, der Einheit gegenüber, durch Annahme von p beliebig grofs gemacht werden kann, selbst wenn es das gröfste unter allen Gliedern des genannten Binomiums wäre. Nun ist aber der Werth von A in (17.) kleiner als der von D in (18.): also kann um so mehr der Werth von A beliebig klein gemacht werden. Das Nemliche gilt von der zweiten Reihe (B) in (17.), und dies führt dann zu dem Schlusse, dafs der Werth der Gleichung (17.) der *Gewifsheit* bis auf jeden beliebigen Grad nahe gebracht werden kann.

Diese Bemerkungen gelten noch, wenn auch r und s in irgend ein beliebiges Verhältnifs (etwa in das der einfachen Wahrscheinlichkeiten a und b) eingeschlossen werden; selbst dann, wenn dieses Verhältnifs der Einheit sehr nahe liegt. Dies führt zu folgendem Satze:

19. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Erscheinen eines Ereignisses, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch $\frac{a}{m}$ bedingt ist, bei Wiederholungs-Versuchen in bestimmte Grenzen ($q:t$) eingeschlossen bleiben werde, wächst bei fortgesetzter Wiederholung und kann durch Vervielfältigung der Versuche der *Gewifsheit* beliebig nahe gebracht werden; auch für den Fall, dafs das Verhältnifs ($q:t$) der Einheit sehr nahe liegen sollte.

Bedeuten p, r und s grofse Zahlen, so kann man eine der Gleichungen 189. oder 190. meiner Comb. Lehre benutzen. Bezeichnet man zu dem Ende die eingeklammerten Reihen in (17.) der Kürze wegen durch M und N und wählt die Gleichung 190., so ergiebt sich für diesen Fall folgender Ausdruck:

$$20.\quad w = 1 - \frac{p^p \sqrt{p}\cdot a^{r-1} b^{p-r+1} r\cdot M}{r^r (p-r)^{p-r} p\sqrt{(2\pi r(p-r))}\cdot m^p} - \frac{p^p \sqrt{p}\cdot a^{s+1} b^{p-s-1} (p-s) N}{s^s (p-s)^{p-s} p\cdot m^p \sqrt{(2\pi s(p-s))}}.$$

Diese Gleichung genügt für Näherungswerthe. Bei Berechnung der Werthe M und N ergeben sich bald Resultate, welche auf die Abnahme der betreffenden Glieder hinweisen und die Auffindung des Werthes erleichtern. Auch die Gleichung (18.) kann zu Näherungs-Bestimmungen benutzt werden, wenn man die oben gemachten Bemerkungen berücksichtigt.

Nimmt man an, dafs die Geburten der Knaben zu denen der Mädchen im Verhältnifs wie 1 zu 1 stehen, und fragt, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs dieses Verhältnifs bei 200000 Geburten die Grenzen von 49 und 51 nicht überschreiten werde, so findet sich aus der Gleichung (20.), wenn $m = 2$, $a = 1$, $b = 1$, $p = 200000$, $r = 98000$ und $s = 102000$ gesetzt wird, ein Werth für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, der wenigstens

$$w = 1 - \frac{0{,}724725\cdots}{10^{13}}$$

ist und man kann daher wenigstens $9\cdot 10^{12}$ gegen 1 wetten, dafs unter der obigen Voraussetzung bei 200000 Geburten die Zahl der Geburten des einen Geschlechts die des andern nicht um 4000 übersteigen, oder nicht unter 98000 fallen und nicht über 102000 steigen werde.

Jac. Bernoulli hat in seinem Werke: „Ars conjectandi Bas. 1713. Pars IV." den in (19.) angegebenen Satz aufgestellt. *Moivre* hat in 65 Probl. seines Werks „Doctr. of Chances III. ed." einen speciellen Fall von (2.) angegeben. *Trembley* hat im 12ten Bande der „Comment. Soc. reg. Scient. Götting. ad A. 1793 et 1794" die Gleichungen (1. 2. und 4.) entwickelt. *Laplace* hat dasselbe Problem in „Théor. anal. d. probl. No. 16. pg. 275" behandelt.

§. 24.

A trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$ bezeichnet wird, $r$mal eher herbeizuführen, als *B* im Stande ist, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch $\frac{b}{n}$

bezeichnet wird, $s$mal herbeizuführen. ***B*** trachtet nach dem Gegentheil und will das für ihn günstige Ereignifs $s$mal eher herbeiführen, als ***A*** das für ihn günstige $r$mal herbeiführen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für ***A*** und wie grofs die für ***B***?

A wird seinen Zweck erreichen, wenn er $r$mal das ihm günstige Ereignifs herbeiführt, und zwar in r, $r+1$, $r+2$, ... oder $r+s-1$ Versuchen. Dabei kann das seinem Gegner günstige Ereignifs entweder ein-, oder zwei-, oder dreimal u. s. w., oder $s-1$mal eintreffen. Der letzte Fall bezeichnet die Grenze des Eintreffens der für ihn ungünstigen Versuche. Benutzen wir nun die im Anfange des vorigen Paragraphs gemachten Bemerkungen, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$1.\quad w=\left(\frac{a}{m}\right)^r+\left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^r\frac{b}{n}+\left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^r\left(\frac{b}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{s}{1}\right)^{r-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^r\left(\frac{b}{n}\right)^{s-1}$$

$$=\left(\frac{a}{m}\right)^r\left(\frac{n}{n-b}\right)^r-\left(\frac{s}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b^s}{n^s}\cdot\frac{a^r}{m^r}\left(\frac{n}{n-b}\right)^r\cdot r\Big[\frac{1}{s}-\frac{r-1}{s+1}\cdot\frac{b}{n}$$

$$+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(s+2)}\left(\frac{b}{n}\right)^2-\cdots(-1)^{r-1}\frac{1}{r+s-1}\left(\frac{b}{n}\right)^{r-1}\Big].$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von ***B*** folgende Gleichung:

$$2.\quad w=\left(\frac{b}{n}\right)^s\Big[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{s-1|1}\frac{a}{m}+\left(\frac{3}{1}\right)^{s-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^2+\cdots+\left(\frac{r}{1}\right)^{s-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-1}\Big]$$

$$=\left(\frac{b}{n}\right)^s\left(\frac{m}{m-a}\right)^s\Big[1-\left(\frac{r}{1}\right)^{s|1}\frac{a^r}{m^r}\cdot s\Big(\frac{1}{r}-\frac{s-1}{r+1}\cdot\frac{a}{m}+\frac{(s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(r+2)}\left(\frac{a}{m}\right)^2-\cdots$$

$$\cdots(-1)^{s-1}\frac{1}{r+s-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{s-1}\Big)\Big].$$

Die hier entwickelten Gleichungen sind in einer Beziehung allgemeiner, als die im vorigen Paragraph. Die Gleichung (4.) §. 23. läfst sich aus (1.) ableiten, wenn $m=n$, $a+b=m$, $r+s-1=p$ gesetzt wird.

A wünscht, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bezeichnet ist, $r$mal eher herbeizuführen, als ***B*** im Stande ist, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch b bezeichnet wird, $s$mal und als ***C*** im Stande ist ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch c bezeichnet ist, $t$mal herbeizuführen. Ein Gleiches wünscht ***B*** seinen beiden Gegnern gegenüber; ein Gleiches ***C*** gegenüber von ***A*** und ***B***. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für ***A*** und wie grofs für ***B*** und ***C***?

Die Gröfsen a, b und c sind echte Brüche. Die Wahrscheinlichkeit für A findet sich leicht, wenn wir die im Vorhergehenden gemachten Schlüsse in Beziehung auf B und C anwenden. A hat hiebei $r$mal das ihm günstige Ereignifs herbeizuführen, ehe B das seinige $s$mal und C das seinige $t$mal herbeiführen kann. Dies kann nun in r oder mehr Versuchen geschehen. Die Grenze der Anzahl dieser Versuche ist $r+s+t-2$. Nun kommt es auf die Betrachtung folgender Fälle an.

a. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal in r Versuchen eintreffen werde, ist

$$w_1 = a^r.$$

b. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es $r$mal in $r+1$ Versuchen eintreffen werde, läfst zu, dafs das für B oder C günstige Ereignifs einmal, jedoch nicht beim $(r+1)$ten Versuche eintreffen werde. Diese Wahrscheinlichkeit führt auf folgende zwei Ausdrücke:

$$w_2 = \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1} a^r b + \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1} a^r c = \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1} a^r (b+c).$$

c. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal in $r+2$ Versuchen eintreffen werde, läfst zu, dafs das für B und C günstige Ereignifs zweimal, einzeln oder in Verbindung mit einander, eintreffen werde. Hieraus ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$w_3 = \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} a^r b^2 + \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} a^r \cdot 2bc + \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} a^r c^2 = \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} a^r (b+c)^2.$$

d. In $r+3$ Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit für A:

$$w_4 = \left(\frac{4}{1}\right)^{r-1|1} a^r [b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3] = \frac{4^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} a^r (b+c)^3.$$

Die Fortsetzung dieser Schlüsse giebt eine Reihe, deren Glieder der Ordnung nach die steigenden Potenzen des Binomiums $b+c$ enthalten. Dieses Binomium ist so lange vollständig, als sich sein Exponent nicht über $s-1$ oder $t-1$ erhebt. Geschieht dies, und ist in diesem Falle $s-1$ kleiner als $t-1$, so werden die folgenden Binominalglieder nicht mehr vollständig sein, sondern bei der Erhebung des Exponenten über die genannte Höhe hinaus ein, zwei oder mehr Glieder an der vollständigen Reihe fehlen. Das $s+1$te Glied wird folgende Gestalt haben:

$$w_{s+1} = \left(\frac{s+1}{1}\right)^{r-1|1} \left[s b^{s-1} c + \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}} b^{s-2} c^2 + \cdots + \frac{s^{s-1|-1}}{1^{s-1|1}} b c^{s-1} + \frac{s^{s|-1}}{1^{s|1}} c^s\right],$$

das $s+2$te Glied folgende:

$$w_{s+2} = \left(\frac{s+2}{1}\right)^{r-1|1}\left[\frac{(s+1)^{2|-1}}{1^{2|1}}b^{s-1}c^2 + \frac{(s+1)^{3|-1}}{1^{3|1}}b^{s-2}c^3 + \cdots + \frac{(s+1)^{s+1|-1}}{1^{s+1|1}}c^{s+1}\right]$$

u. s. w. Hier dürfen die Potenzen von c sich nicht über $t-1$ erheben. Dies führt zu folgendem Ausdruck der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$3.\quad w = a^r\Big[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1}(b+c)+\left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1}(b+c)^2+\cdots+\left(\frac{s}{1}\right)^{r-1|1}(b+c)^{s-1}$$
$$+\left(\frac{s+1}{1}\right)^{r-1|1}\left(sb^{s-1}c+\frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}b^{s-2}c^2+\cdots+c^s\right)$$
$$+\left(\frac{s+2}{1}\right)^{r-1|1}\left(\frac{(s+1)^{2|-1}}{1^{2|1}}b^{s-1}c^2+\frac{(s+1)^{3|-1}}{1^{3|1}}b^{s-2}c^3+\cdots+c^{s+1}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{s+t-1}{1}\right)^{r-1|1}b^{s-1}c^{t-1}\Big].$$

Hieraus findet sich die Wahrscheinlichkeit für B leicht. Es tritt b an die Stelle von a und umgekehrt s an die Stelle von r in (3.). Dabei ist weiter zu beachten, welche von den Gröfsen r und t kleiner als die andere sei. Die Reihe wird dann folgende Gestalt haben:

$$4.\quad w = b^s\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{s-1|1}(a+c)+\left(\frac{3}{1}\right)^{s-1|1}(a+c)^2+\cdots\left(\frac{r+t-1}{1}\right)^{s-1|1}a^{r-1}c^{t-1}\right],$$

die Wahrscheinlichkeit für C wird sein:

$$5.\quad w = c^t\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{t-1|1}(a+b)+\left(\frac{3}{1}\right)^{t-1|1}(a+b)^2+\cdots\left(\frac{r+s-1}{1}\right)^{t-1|1}a^{r-1}b^{s-1}\right].$$

Die Beantwortung der vorliegenden Frage bereitet die folgender allgemeinern vor.

A_1 trachtet, gegen $n-1$ Gegner, A_2, A_3, A_4, ... A_n ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch a bezeichnet wird, $r$mal eher herbeizuführen, als A_2 im Stande ist, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch b bezeichnet wird, $s$mal u. s. f. und als A_n im Stande ist, für sich ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch x bezeichnet wird, $z$mal für sich herbeizuführen. Ein Gleiches unternimmt A_2 allen übrigen gegenüber; ebenso A_3 u. s. w. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A_1, A_2, ... A_n?

Die Anwendung der Schlüsse, welche zur Auffindung der Gleichungen (1. bis 5.) geführt haben, führen auch hier, mit geringen Veränderungen, zum Ziele; wie sich schon aus der Vergleichung dieser Gleichungen unter-

einander ergiebt. Dies giebt für die Wahrscheinlichkeit von A_1:

$$6. \quad w = a^r \Big[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1} (b+c+d+\cdots+n)$$
$$+ \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} (b+c+d+\cdots+n)^2$$
$$+ \left(\frac{4}{1}\right)^{-1|1} (b+c+d+\cdots+n)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{(s+t+\cdots+z-n+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} b^{s-1} c^{t-1} \cdots n^{z-1} \Big].$$

Die Wahrscheinlichkeit für A_2 ist

$$7. \quad w = b^s \Big[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{s-1|1} (a+c+d+\cdots+n)$$
$$+ \left(\frac{3}{1}\right)^{s-1|1} (a+c+d+\cdots+n)^2$$
$$+ \left(\frac{4}{1}\right)^{s-1|1} (a+c+d+\cdots+n)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{(r+t+\cdots+z-n+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} a^{r-1} c^{t-1} \cdots n^{z-1} \Big]$$

u. s. w. Die begleitenden Polynomien lassen sich so lange vollständig entwickeln, als der Exponent sich nicht über eine der Gröſsen

$$r-1, \quad s-1, \quad t-1, \quad u-1, \quad \ldots\ldots \quad z-1$$

erhebt. Geschieht dies, so ergeben sich Entwicklungen von beschränkter Glieder-Anzahl; denn die Wahrscheinlichkeiten dürfen nicht öfter vorkommen, als die eben angeführten Werthe andeuten. Deshalb dürfen denn auch keine höheren Potenzen als die genannten erscheinen. Nimmt man für die vorliegenden Entwicklungen die Combinationen zu Hülfe, so zeigt sich, daſs diejenigen Ausdrücke, welche die Glieder der eingeschlossenen Reihe begleiten, die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a, b, c, \ldots, n$ bilden; wobei jedoch die Beschränkung eintritt, daſs die Wiederholungen eine bestimmte Grenze nicht überschreiten können. Das Element a darf nicht mehr als $r-1$ mal, das Element b nicht mehr als $s-1$mal u. s. w. wiederholt vorkommen.

Diese Bemerkungen führen zu folgendem Ausdruck der Wahrscheinlichkeit für A_1:

$$8.\quad w = a^r\Big[1+\Big(\frac{2}{1}\Big)^{r-1|1} P'(b, c, d, \ldots . n)^1$$

$$+\Big(\frac{3}{1}\Big)^{r-1|1} P'(b, c, d, \ldots . n)^2$$

$$+\Big(\frac{4}{1}\Big)^{r-1|1} P'(b, c, d, \ldots . n)^3$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+\frac{(s+t+\cdots+z-n+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} P'(b, c, d, \ldots n)^{s+t+\cdots+z-n+1}\Big]$$

$$(b^{s-1}, c^{t-1}, d^{u-1}, \ldots . n^{z-1});$$

die Wahrscheinlichkeit für A_2 ist

$$9.\quad w = b^s\Big[1+\Big(\frac{2}{1}\Big)^{s-1|1} P'(a, c, d, \ldots . n)^1$$

$$+\Big(\frac{3}{1}\Big)^{s-1|1} P'(a, c, d, \ldots . n)^2$$

$$+\Big(\frac{4}{1}\Big)^{s-1|1} P'(a, c, d, \ldots . n)^3$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+\frac{(r+t+\cdots+z-n+2)^{s-1|1}}{1^{s-1|1}} P'(a, c, d, \ldots . n)^{r+t+\cdots+z-n+1}\Big]$$

$$(a^{r-1}, c^{t-1}, d^{u-1}, \ldots . n^{z-1})$$

u. s. w. Die unten angeschriebene Reihe

$$(a^{r-1}, c^{t-1}, d^{u-1}, \ldots . n^{z-1})$$

soll die oben angegebene Beschränkung der Wiederholungen anzeigen.

Die einfachen Fälle der Gleichungen dieses Paragraphs hat ***Pascal*** in einem Briefe an ***Fermat*** behandelt, und nach ihm ***Nontmort*** in seiner „Analyse sur les jeux d. har. Propos. XL et XLI. IIe édit." und ***Moivre*** in seinen „Doctr. of Chances Probl. VI." ***Lagrange*** hat einzelne Fälle durch zurücklaufende Reihen in „Nouv. Mémoires de l'acad. roy. d. sciences et bell. lett. de Berl. an. 1775" gelöset, und nach ihm hat ***Trembley*** dieselben Fälle in „Comment. soc. reg. scient. Gotting. ad ann. 1793 et 1794 Vol. XII" behandelt. ***Laplace*** hat die von ihm betrachteten Fälle durch die „Fonct. génératr." in seiner „Théor. anal. d. prob. Chap. II" abgeleitet. Er bemerkt Pg. 210, dafs das vorliegende Problem den Namen „Problème des partis" führt. Die Form, unter welcher es aufgestellt werden kann und aufgestellt werden würde, ist folgende:

A und ***B*** spielen mit einander um eine bestimmte Summe ***a***. Jeder von ihnen gewinnt die ausgesetzte Summe, wenn er eine bestimmte Anzahl Spiele, oder Partieen gewinnt, ehe der andere die gleiche oder eine andere gewonnen

hat. Dem A fehlen noch r, dem B s Partieen, zu gewinnen. Sie kommen überein, das Spiel nicht fortzusetzen. Nach welchem Maafsstabe soll die ausgesetzte Summe unter A und B vertheilt werden?

Die Gleichungen (1. und 2.) geben hierüber Aufschlufs. Sind z. B. A und B übereingekommen, fünf Spiele zu machen, und soll Derjenige die ausgesetzte Summe a erhalten, welcher in drei Spielen Sieger bleibt, und setzen sie nun das Spiel nicht weiter fort, nachdem ein Spiel gemacht ist, worin A Sieger blieb, so ist der Anspruch von A auf die ausgesetzte Summe $\frac{11}{16}a$, und der von B: $\frac{5}{16}a$. Hiebei ist die Wahrscheinlichkeit für Jeden, im einzelnen Falle zu siegen, gleichgrofs, also $=\frac{1}{2}$ angenommen und in den Gleichungen (1. und 2.) $r=2$, $s=3$ gesetzt.

Der Rückblick auf die Paragraphen 21. bis 24. zeigt, dafs die dort behandelten Probleme zusammengehören; weswegen sie auch hier zusammengestellt sind. Die hieher gehörige Literatur ist in diesem und dem vorigen Paragraph angegeben.

III.

§. 25.

In einer Urne befinden sich r verschiedene Kugel-Arten und von jeder Art m verschiedene, aber auf gleiche Art bezeichnete Kugeln. p Kugeln werden einzeln herausgenommen und die gezogene Kugel wird nicht in die Urne zurückgelegt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade s Kugeln von einer bestimmten Bezeichnung nach einander erscheinen werden?

Die Anzahl der Kugelgruppen, welche ein bestimmtes Zeichen haben und s Kugeln in sich begreifen, ist $r^{s|-1}$. Diese Gruppen können von der ersten, oder zweiten, oder dritten u. s. w. oder von der $(p-s+1)$ten Ziehung an erscheinen, also $p-s+1$mal. Jede dieser Kugelgruppen kann so oft erscheinen, als sie (als Ganzes betrachtet) von Kugelgruppen mit anderer Bezeichnung auf den übrigen $p-s$ Stellen, sie mögen folgen oder vorangehen, oder theilweise zugleich folgen und vorangehen, begleitet werden kann. Hieraus ergiebt sich für die dem Ereignifs günstige Gruppen-Anzahl:

$$(p-s+1)\cdot r^{s|-1}(mr-r)^{p-s|-1}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist $(rm)^{p|-1}$. Denn die Zahl der in der Urne enthaltenen Kugeln ist rm. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$1.\quad w=\frac{(p-s+1)\cdot r^{s|-1}(mr-r)^{p-s|-1}}{(mr)^{p|-1}}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs s Kugeln, von einem bestimmten Zeichen, hintereinander gerade zweimal erscheinen werden.

Die Zahl der Kugelgruppen von der Dimension s, die dasselbe Zeichen haben, welches s vorher erschienene Kugeln schon hatten, ist

$$r^{s|-1}(r-s)^{s|-1} = r^{2s|-1}.$$

Diese Kuppelgruppen, welche in zwei Partieen getrennt und dabei als Ganzes erscheinen sollen, können so oft vorkommen, als sie $p-2s+2$ Stellen ausfüllen oder die Zerstreuung in $p-2s+2$ Fächer eingehen können. Diese Anzahl ist nach §. 41. meiner Comb. Lehre $\frac{(p-2s+2)^{2|-1}}{1^{2|1}}$. Aufserdem treten mit jeder einzelnen Gruppe alle diejenigen in Verbindung, welche von anderer Bezeichnung sind und die übrigen $p-2s$ Stellen einnehmen können. Die Anzahl der günstigen Gruppen ist demnach

$$\frac{(p-2s+1)^{2|1}}{1^{2|1}} r^{2s|-1}(mr-r)^{p-2s|-1},$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$2. \quad w = \frac{(p-2s+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{r^{2s|-1}(mr-r)^{p-2s|-1}}{(rm)^{p|-1}}.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, dafs s Kugeln von einem bestimmten Zeichen hintereinander gerade $x$mal unter den oben genannten Bedingungen erscheinen werden:

$$3. \quad w = \frac{(p-xs+1)^{x|1}}{1^{x|1}} \cdot \frac{r^{xs|-1}(mr-r)^{p-xs|-1}}{(mr)^{p|-1}}.$$

Hiebei ist vorausgesetzt, dafs eine Kugel von der bestimmten Bezeichnung in den übrigen $p-xs$ Ziehungen nicht mehr erscheine.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs unter den genannten Bedingungen wenigstens einmal eintreffen werde, ergiebt sich aus (3.) leicht, wenn man allmälig $1, 2, 3, 4, \ldots$ statt x setzt. Sie ist

$$4. \quad w = (p-s+1)\frac{r^{s|-1}(mr-r)^{p-s|-1}}{(mr)^{p|-1}} + \frac{(p-2s+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{r^{2s|-1}(mr-r)^{p-2s|-1}}{(mr)^{p|-1}}$$
$$+ \frac{(p-3s+1)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{r^{3s|-1}(mr-r)^{p-3s|-1}}{(mr)^{p|-1}} + \ldots$$

Diese Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht.

Nimmt man p Kugeln unter den oben genannten Bedingungen aus der Urne und fragt: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach einander ge-

rade x_1 Kugeln von einer bestimmten Bezeichnung, x_2 von einer zweiten, x_3 von einer dritten u. s. f., x_s von einer sten Bezeichnung erscheinen werden, so ergiebt sich leicht aus den obigen Bemerkungen der Ausdruck

$$5.\quad w = \frac{(p-x_1-x_2-\cdots-x_s+1)^{s|-1} \cdot r^{x_1|-1} \cdot r^{x_2|-1} \ldots r^{x_s|-1} (mr-sr)^{p-x_1-x_2-\cdots-x_s|-1}}{(mr)^{p|-1}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Ereignifs in einer bestimmten Ordnung eintreffen werde, ist.

$$6.\quad w = \frac{(p-x_1-x_2-\cdots-x_s+1)^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{r^{x_1|-1} \cdot r^{x_2|-1} \ldots r^{x_s|-1} (mr-r)^{p-x_1-x_2-\cdots-x_s|-1}}{(mr)^{p|-1}}.$$

Diese Gleichungen finden mancherlei Anwendungen.

In einer Urne sind r verschiedene Kugel-Arten, von denen jede m verschiedene, aber auf gleiche Weise bezeichnete Kugeln zählt. Man zieht s Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen, und wiederholt das Verfahren so lange als möglich. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs s Kugeln von einer bestimmten Bezeichnung hintereinander in einer der möglichen Ziehungsreihen erscheinen werden, ohne dafs vorher eine oder mehrere Kugeln von einer andern Bezeichnung erschienen sind?

Die Wahrscheinlichkeit beruht darauf, dafs s Kugeln mit der bestimmten Bezeichnung entweder in der ersten Ziehungsreihe, oder, wenn es nicht geschieht, in der zweiten, oder, wenn es in den beiden ersten nicht geschieht, in der dritten Ziehungsreihe erscheinen werden u. s. w., ohne dafs vorher eine Kugel von anderer Bezeichnung erschienen ist. Die Glieder dieser zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit ergeben sich aus der Gleichung (1.) leicht. Es findet sich

$$7.\quad w = \frac{r^{s|-1}}{(rm)^{s|-1}} + \frac{(mr-r)^{s|-1} r^{s|-1}}{(rm)^{2s|-1}} + \frac{(mr-r)^{2s|-1} r^{s|-1}}{(rm)^{3s|-1}} + \frac{(mr-r)^{3s|-1} r^{s|-1}}{(rm)^{4s|-1}} + \cdots$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht.

Sind schon q Kugeln gezogen und darunter x von der bestimmten Bezeichnung erschienen, so ergiebt sich aus (7.) folgender Ausdruck:

$$8.\quad w = \frac{(r-x)^{s|-1}}{(rm-q)^{s|-1}} \left[1 + \frac{(rm-r-q)^{s|-1}}{(rm-q-s)^{s|-1}} + \frac{(rm-r-q)^{2s|-1}}{(rm-q-s)^{2s|-1}} + \cdots \right].$$

Diese Gleichungen finden unter anderm beim Pharao Anwendung und bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dafs in einen Abzug (Pile) zwei gleiche Blätter von einer bestimmten Bezeichnung fallen werden, ohne dafs vorher ein Blatt mit dieser Bezeichnung erschien. Gesetzt, es sei noch kein Blatt hievon

erschienen und der Banquier habe noch 21 Blätter in der Hand, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Plié fallen werde:

$$9. \quad w = \frac{4 \cdot 3}{(2r)^{4|-1}}[(2r-2)(2r-3)+(2r-4)(2r-5)+\cdots 4\cdot 3+2\cdot 1],$$

wenn in (8.) $x=0$, $q=0$, $r=4$, $rm=2r$, $s=2$ gesetzt wird. Die in Klammern eingeschlossene Reihe läfst sich wie folgt summiren. Es ist

$$1^{2|1}+2^{2|1}+3^{2|1}+\cdots (2r-3)^{2|1} = \frac{(2r-3)(2r-2)(2r-1)}{3}.$$

Ferner ist aus 409. Pg. 177 m. Lehre von den aufst. Funct.

$$1^{2|1}-2^{2|-1}+3^{2|-1}-\cdots+(2r-3)^{2|1} = \frac{(2r-2)^2}{2}.$$

Werden beide Gleichungen zusammengezählt und das Resultat durch 2 dividirt, so ergiebt sich

$$1^{2|1}+3^{2|1}+5^{2|1}+\cdots (2r-3)^{2|1} = \frac{(2r-2)2r(4r-5)}{4\cdot 3}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also aus (9.)

$$10. \quad w = \frac{4r+5}{(2r-1)(2r+3)}.$$

Ist schon ein Blatt von einer bestimmten Bezeichnung erschienen und sind noch $2r$ Blätter umzuschlagen, so ist in (8.) $x=1$, $rm-q=2r$, $s=2$ zu setzen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Plié erscheinen werde, ehe eines der drei noch übrigen Blätter gefallen ist, wird

$$w = \frac{3\cdot 2}{(2r)^{3|-1}}[2r-2+2r-4+\cdots+4+2]$$

sein. Die eingeklammerte Reihe ist leicht zu summiren. Die Summe ist $r^{2|-1}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$11. \quad w = \frac{3}{2(2r-1)}.$$

Sind schon zwei Blätter von einer bestimmten Bezeichnung erschienen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Plié erscheinen werde, wenn noch $2r$ Carten umzuschlagen sind,

$$12. \quad w = \frac{1}{2r-1}.$$

Dieser Werth ergiebt sich, wenn $x=2$, $rm-q=2r$ und $s=2$ gesetzt wird und die nöthigen Reductionen gemacht werden.

Sind noch $2r$ Carten umzuschlagen und wird eine von ihnen, etwa die unterste, als nicht mitwirkend betrachtet, so ergeben sich auf ähnliche Weise folgende Wahrscheinlichkeiten für die oben bezeichneten Fälle; und zwar,

wenn noch kein Blatt erschienen ist:

$$13.\quad w' = \frac{4\cdot 3}{(2r-1)^{4|-1}}[(2r-3)^{2|-1}+(2r-5)^{2|-1}+\cdots\ 5^{2|-1}+3^{2|-1}]$$

$$= \frac{4r-3}{(2r-1)(2r-3)};$$

wenn Ein Blatt erschienen ist:

$$14.\quad w = \frac{3\cdot 2}{(2r-1)^{3|-1}}[2r-3+2r-5+\cdots+3+1] = \frac{3(r-1)}{(2r-1)(2r-3)};$$

wenn Zwei Blätter erschienen sind:

$$15.\quad w = \frac{2\cdot 1}{(2r-1)^{2|-1}}(r-1) = \frac{1}{2r-1}.$$

Von p Urnen enthält jede m verschiedene Kugeln, deren Bezeichnungsart in allen dieselbe ist. Man nimmt aus jeder Urne eine Kugel heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen Kugeln die gleiche Bezeichnung haben?

Die Zahl der Fälle, welche dem Ereignifs günstig sind, ist m, denn von m verschiedenen Zeichen kann jedes nur einen günstigen Fall geben; die Zahl aller möglichen Fälle ist m^p. Hieraus ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit

$$16.\quad w = \frac{1}{m^{p-1}}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nur Kugeln von zweierlei Zeichen erscheinen werden, und zwar x_1 von dem einen und $p-x_1$ von dem zweiten Zeichen?

Betrachtet man x_1 Kugeln von der einen Bezeichnung als ein Ganzes, und die von der andern Bezeichnung auch als solches, so ergeben sich so viele Kugelgruppen von zwei verschiedenen Bezeichnungen, als Versetzungen aus m Elementen zur zweiten Classe gebildet werden können. Diese Anzahl ist $m(m-1)$. Erwägt man aber, dafs die gezogenen p Kugeln von zweierlei Bezeichnung so oft mit einander verbunden werden können, als x_1 unter sich gleiche Elemente Versetzungen von $p-x_1$ unter sich gleichen Elementen eingehen können, so hat man, mit Rücksicht auf (§. 9. m. Comb. L.), für die Zahl der günstigen Fälle:

$$A_1 = \frac{p^{p|-1}}{1^{x_1|1}\cdot 1^{p-x_1|1}}m^{2|-1}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$17.\quad w = \frac{p^{p|-1}m^{2|-1}}{1^{x_1|1}\cdot 1^{p-x_1|1}\cdot m^p}.$$

Diese Gleichung gilt nur so lange, als x_1 und $p-x_1$ unter sich ungleich sind. Ist $p-x_1=x_1$, so müssen die Versetzungen, welche bei den Kugelgruppen von gleicher Bezeichnung eintreten sollten, ausgeschlossen werden. Die Zahl der günstigen Fälle ist dann

$$A_1 = \frac{p^{p|-1}}{1^{x_1|1}\cdot 1^{p-x_1|1}}\cdot\frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}$$

und die Wahrscheinlichkeit geht in

$$18.\qquad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{2|-1}}{1^{2|1}\cdot 1^{x_1|1}\cdot 1^{p-x_1|1}\, m^p}$$

über. In diesem Falle ist $p=2x_1$, also p eine gerade Zahl.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs Kugeln von dreierlei Bezeichnung, x_1 von einer, x_2 von einer zweiten und x_3 von einer dritten erscheinen werden?

Setzt man die oben angegebene Betrachtungsart weiter fort, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$19.\qquad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{3|-1}}{1^{x_1|1}\cdot 1^{x_2|1}\cdot 1^{x_3|1}\, m^p}.$$

Hier ist die Bedingungsgleichung: $x_1+x_2+x_3=p$. Sind zwei dieser Gröfsen einander gleich, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$20.\qquad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{3|-1}}{1^{2|1}\cdot 1^{x|1}\cdot 1^{x_1|1}\cdot 1^{x_1|1}\, m^p}.$$

Sind alle drei gleich, so ist $p=3x$ und es ergiebt sich

$$21.\qquad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{3|-1}}{1^{3|1}(1^{x|1})^3\, m^p}.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich leicht für die Wahrscheinlichkeit, dafs Kugeln von r verschiedenen Bezeichnungen, x_1 von der einen, x_2 von einer zweiten u. s. w. erscheinen werden:

$$22.\qquad w = \frac{p^{p|-1}}{1^{x_1|1}\cdot 1^{x_2|1}\cdots 1^{x_r|1}}\cdot\frac{m^{r|-1}}{m^p}.$$

Hier ist die Bedingungsgleichung:

$$x_1+x_2+x_3+\cdots x_r = p.$$

Dabei können die Zahlen, welche die Bezeichnungen andeuten, selbst wieder unter einander gleich sein und es kann die eine Art t_1 mal, die andere t_2 mal u. s. w. vorkommen. Daraus ergiebt sich folgende allgemeine Gleichung:

$$23.\qquad w = \frac{p^{p|-1}}{(1^{x_1|1})^{t_1}\cdot(1^{x_2|1})^{t_2}\cdots(1^{x_r|1})^{t_r}}\cdot\frac{m^{s|-1}}{1^{t_1|1}\cdot 1^{t_2|1}\cdot 1^{t_3|1}\cdots 1^{t_r|1}\cdot m^p}.$$

Folgendes sind die Bedingungsgleichungen für diese Formel:

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 + \dots t_r x_r = p,$$
$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots t_r = m.$$

Die Gröfsen t_1, t_2, t_3, ... t_r und x_1, x_2, x_3, ... x_r können unter der genannten Beschränkung jeden Werth haben, und selbst 0 sein. Sollen Kugeln von lauter verschiedenen Zeichen und je eine erscheinen, so ist die Wahrscheinlichkeit aus (23.):

$$24. \quad w = \frac{p^{p|-1}}{(1^{1|1})^p} \cdot \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1} \cdot m^p} = \frac{m^{p|+1}}{m^p};$$

wie bekannt. Es ist leicht zu sehen, dafs die vorstehenden Gleichungen auch die Wahrscheinlichkeiten für den Fall ausdrücken, wo nur eine Urne vorhanden ist und man $p$mal aus ihr eine Kugel zieht, die nach jeder Ziehung in die Urne zurückgelegt wird. Der Ausdruck

$$25. \quad A = \frac{p^{p|-1}}{(1^{x_1|1})^{t_1}(1^{x_2|1})^{t_2} \dots (1^{x_r|1})^{t_r}} \cdot \frac{m^{t_1+t_2+t_3+\dots t_r|-1}}{1^{t_1|1} \cdot 1^{t_2|1} \cdot 1^{t_3|1} \dots 1^{t_r|1}}$$

giebt die Anzahl der Gruppen, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden, worin Elemente mit derselben Stellenzahl ein- oder mehreremal vorkommen, und löset also eine Aufgabe aus der Combinationslehre. Die Bedingungsgleichungen zu (23.) gelten auch hier.

Die Gleichungen dieses Paragraphs finden späterhin mancherlei Anwendungen. Insbesondere gewähren sie manche Anwendungen auf unser Zahlensystem. Dieses System beruht nämlich auf den Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu den verschiedenen Classen, und weicht nur darin davon ab, dafs das Zeichen 0 nicht geschrieben wird, wenn es zu Anfange und vor einem der übrigen Zahlzeichen ein- oder mehreremal, oder allein, stehen würde. Das Zahlensystem ist unstreitig eine der wichtigsten Entdeckungen im Gebiete der Mathematik, die um so sinnreicher ist, weil das System auf so einfachen Principien beruht und die Entdeckung, in grauer Vorzeit gemacht, der Wissenschaft so viele Jahrhunderte voraneilte und als ein Vermächtnifs eines grofsen Geistes so lange vereinzelt und verwaiset da stand, bis es gelang ihr die gebührende Stelle anzuweisen. Der Erfinder ist unbekannt; vielleicht gehört die Entdeckung mehreren Generationen an, weil sie die Kräfte des Einzelnen überstieg. Diese Vermuthung gewinnt an Wahrscheinlichkeit, wenn man den Versuch Archimedes, ein Zahlensystem zu schaf-

fen, erwägt, was nun auf so einfache Weise gelöset ist, und was selbst jenem schöpferischen Geiste misslang.

Die Menge der $n$stelligen Zahlen ergiebt sich leicht, wenn man bemerkt, daſs nur 9 Zeichen die erste Stelle einnehmen, an den folgenden Stellen aber alle Zeichen ohne Unterschied erscheinen können. Sie ist

$$26.\quad A = 9P'[0, 1, 2, \ldots 9]^{n-1} = 9\cdot 10^{n-1}.$$

Die Menge aller Zahlen, welche n Stellen und weniger haben können, ist

$$27.\quad A = P'[0, 1, 2, \ldots 9]^n - 1 = 10^n - 1;$$

denn die Gruppe, in welcher das Zeichen 0 als ein $n$faches erscheint, dient nicht als Zahl. In diesen Zahlen erscheinen die Ziffern zum Theil wiederholt, zum Theil auch nicht.

In einer Urne sind alle $n$zifferigen Zahlen enthalten. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, in welcher keine Ziffer wiederholt ist?

Die Menge der günstigen Zahlen findet sich, wenn man bemerkt, daſs auf der ersten Stelle nur eines der Zahlzeichen 1, 2, 3, ... 9, auf den folgenden $n-1$ Stellen weder dasselbe, noch eines der übrigen ergänzenden Zeichen wiederholt erscheinen darf. Sie ist

$$28.\quad A = 9\cdot 9^{n-1|-1}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist in (26.) angegeben. Die Wahrscheinlichkeit ist

$$29.\quad w = \frac{9^{n-1|-1}}{10^{n-1}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, unter den genannten Bedingungen eine Zahl aus den $n$zifferigen zu ziehen, wenn wenigstens eine Ziffer wiederholt erscheint, ist aus (29.)

$$30.\quad w = 1 - \frac{9^{n-1|-1}}{10^{n-1}} = \frac{10^{n-1} - 9^{n-1|-1}}{10^{n-1}};$$

n kann sich in dieser Gleichung nicht über 10 erheben.

Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, die n Ziffern und weniger enthält, eine zu ziehen, in welcher keine Ziffer wiederholt erscheint, ergiebt sich, wenn man in (28.) n der Reihe nach $= 1, 2, 3, \ldots n$ setzt und das Resultat durch (27.) dividirt. Sie ist

$$31.\quad w = 9\cdot\frac{\sum_1^n 9^{n-1|-1}}{10^n - 1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, welche wenigstens eine Ziffer wiederholt enthält, ist

$$32. \quad w = \frac{10^{n-1} - 1 - 9\,\Sigma_1^n\, 9^{n-1|-1}}{10^n - 1}.$$

So ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in welcher sich die Zahlen von 1 bis 10000 einschliefslich befinden, eine Zahl mit lauter ungleichen Ziffern zu ziehen, 0,5274; die, eine Zahl mit wiederholten Ziffern zu ziehen, ist 0,4726. Bei den Zahlen von 1 bis 100000 sind diese Wahrscheinlichkeiten 0,3249 und 0,6751.

In einer Urne sind lauter $n$stellige Zahlen enthalten. Einmal wird gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der gezogenen Zahl gerade m gleiche Ziffern vorkommen werden?

Die Zahl der günstigen Fälle finden sich, wenn alle $n$stelligen Zahlen in solche eingetheilt werden, in welchen nur die Zeichen 1, 2, 3, ... 9, und in solche, in welchen dieselben mit 0 in Verbindung vorkommen. Die Zahl der Fälle, in welchen irgend ein Zeichen gerade $m$mal wiederholt, die übrigen also nicht wiederholt erscheinen, ergiebt sich aus (10.), wenn man $p = n$, $x_1 = m$, $t_1 = 1$, $x_2 = 1$, $t_2 = n - m$, $m = 9$ setzt. Sie ist

$$A_1 = \frac{n^{n|-1}}{1^{m|1} \cdot 1^{n-m|1}} \cdot 9^{n-m+1|-1}.$$

Wird das Zeichen 0 eingeführt, so ist zu bemerken, dafs es nie die erste Stelle einnehmen kann. Es kann daher nur auf den $n-1$ letzten Stellen als $n$faches erscheinen. Diese Anzahl ist

$$A_2 = \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m|1} \cdot 1^{n-m-1|1}} \cdot 9 \cdot 8^{n-m-1|-1}.$$

Hieran schliefst sich die Menge der Zahlen, in welchen das Zeichen, welches die erste Stelle einnimmt, $n-1$mal mit sich selbst, zugleich mit 0 und ferner mit den übrigen 8 Zeichen zur Ergänzung bis auf $n-1$ Dimensionen in Verbindung treten kann. Sie ist

$$A_3 = \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m-1|1} \cdot 1^{n-m-1|1}} \cdot 9 \cdot 8^{n-m-1|-1}.$$

Hiezu kommt endlich die Menge der Zahlen, in welchen das Zeichen, welches die erste Stelle einnimmt, nicht unter den folgenden vorkommt, sondern ein anders der übrigen Zeichen als $m$faches und das Zeichen 0 als Einzelnes. Sie ist

$$A_4 = \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m|1}\, 1^{n-m-2|1}} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7^{n-m-2|-1}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$33.\quad w = \frac{1}{9\cdot 10^{n-1}}\left[\frac{n^{m|-1}}{1^{m|1}\cdot 1^{n-m|1}}\cdot 9^{n-m|-1} + \frac{(n-1)^{m|-1}}{1^{m|1}\cdot 1^{n-m-1|1}}\cdot 9^{n-m|-1}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}\cdot 1^{n-m|1}}\cdot 9^{n-m-1|-1} + \frac{(n-1)^{m+1|-1}}{1^{m|1}\cdot 1^{n-m-2|1}}\cdot 9^{n-m|-1}\right].$$

Sind in einer Urne die Zahlen von 1 bis 1000000 einschliefslich enthalten, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, welche eine und dieselbe Ziffer gerade dreimal enthält, 0,097533. Sie wird gefunden, wenn man in (33.) n der Reihe nach $= 3, 4, 5, 6$ setzt und das Resultat durch 10^6 dividirt. Man kann 1 gegen 1 wetten, dafs unter 11 Zahlen *eine* gezogen werden wird, in welcher eine Ziffer gerade dreimal vorkommt. Hieraus läfst sich leicht die Wahrscheinlichkeit finden, eine Zahl zu ziehen, in welcher eine Ziffer höchstens oder wenigstens $m$mal vorkommt u. s. w.

§. 26.

In einer Urne befinden sich m verschiedene Kugeln. Es wird $p$mal gezogen und die gezogene Kugel wird nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade k bestimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung hintereinander wenigstens einmal erscheinen werden?

Es sind k Ziehungen nöthig, damit das Verlangte in Erfüllung gehe; denn die oben bezeichnete Kugelgruppe ist als ein zusammengehöriges Ganze zu betrachten. Diese Gruppe kann nun in k Ziehungen erscheinen, welche von der ersten, oder der zweiten, oder der dritten Ziehung etc. an gezählt werden. Dies giebt $p-k+1$ Fälle. Jeder einzelne Fall kann mit m^{p-k} Gruppen in Verbindung treten, welche vorangehen, oder folgen, oder gleichzeitig vorangehen und folgen. Die Zahl der daraus sich ergebenden Fälle ist

$$A_1 = (p-k+1)m^{p-k}.$$

Ist auf diese Weise die $(k+1)$te, oder eine spätere Ziehung geschehen, so sind k und mehr Ziehungen vorausgegangen, und damit kann möglicherweise eine Gruppe von k Kugeln erschienen sein, welche die angezeigte Eigenschaft hat, und eine zweite oder dritte etc. kann folgen. Von der $(k+1)$ten Ziehung an ist die angegebene Zählungsart unrichtig. Es müssen diejenigen Fälle wieder ausgestofsen werden, in welchen die fragliche Kugelgruppe zweimal erscheinen kann. Das wiederholte Eintreffen einer Kugelgruppe nimmt $2k$ Ziehungen in Anspruch. Dann bleiben noch $p-2k$ Ziehungen übrig, in welchen die beiden einander gleichen Kugelgruppen alle möglichen Stellen unter sich einnehmen

können. Die dadurch bedingte Zerstreuungs-Anzahl ist nach (§. 41. No. 121. m. Comb. L.) $= \frac{(p-2k+2)^{2|-1}}{1^{2|1}}$: denn zwei gleiche Elemente werden in $p-2k+2$ Fächern alle möglichen Stellungen einnehmen. Jeder einzelne Fall kann so oft vorkommen, als in den übrigen $m-2k$ Ziehungen Kugelgruppen auftreten können. Die auszustoßende Gruppen-Anzahl ist

$$A_2 = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} m^{p-2k}.$$

Diese Schlußweise bleibt richtig, bis die $(2k+1)$te Ziehung geschehen ist. Von da an müssen dieselben Schlüsse auf das dreimalige Vorkommen der fraglichen Kugelgruppen angewendet, die daraus hervorgehende Zahl muß auf eine ähnliche Weise bestimmt und von A_2 selbst muß wieder ausgestoßen werden. Diese Anzahl ist

$$A_3 = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} m^{p-3k}.$$

Wird diese Schlußart fortgesetzt, so ergiebt sich für die Zahl der günstigen Fälle, die wir durch A_k bezeichnen, folgende Gleichung:

$$1.\quad A_k = \frac{p-k+1}{1} m^{p-k} - \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} m^{p-2k} + \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} m^{p-3k} - \dots$$

Wird durch m^p dividirt, so findet sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$2.\quad w = \frac{p-k+1}{m^k} - \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1} m^{2k}} + \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1} m^{3k}} - \frac{(p-4k+1)^{4|1}}{1^{4|1} m^{4k}} + \dots$$

Bleiben die Bedingungen wie oben, und soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß sämmtliche Kugeln in einer bestimmten Ordnung hinter einander in p Ziehungen wenigstens einmal erscheinen werden, so ergiebt sich aus (2.), wenn man $k = m$ setzt:

$$3.\quad w = \frac{p-m+1}{m^m} - \frac{(p-2m+1)^{2|1}}{1^{2|1} m^{2m}} + \frac{(p-3m+1)^{3|1}}{1^{3|1} m^{3m}} - \dots$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß k bestimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung hinter einander wenigstens $r$mal erscheinen werden?

Das erwartete Ereigniß kann eintreten, wenn rk Ziehungen gemacht sind. Diesen rk Ziehungen können $p-rk$ nachfolgen. Da nun das Ereigniß $r$mal wiederholt eintreffen soll, so kann dies so oft geschehen, als r Elemente in $p-rk+r$ Fächer zerstreut werden können. Die Zahl der dem Erwarteten günstigen Fälle ist demnach:

$$A_r = \frac{(p-rk+r)^{r|-1}}{1^{r|1}} m^{p-rk} = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}} m^{p-rk}$$

Diese Zahl ist so lange richtig, bis die erste der dem Erwarteten günstigen Kugelgruppen um k Stellen zurückgerückt ist, oder bis k Ziehungen hinzugekommen sind. In diesem Fall kann das Ereignifs schon einmal vorausgegangen sein. Es tritt sofort eine weitere günstige Kugelgruppe vor. Die Zahl, welche durch dieses Vortreten bedingt wird, mufs bestimmt und abgezogen werden. Während nemlich die fraglichen Gruppen von der $(k+1)$ten Ziehung an eintreten und alle möglichen Stellungen einnehmen, kann die $(r+1)$te Kugelgruppe vortreten und mit ihnen alle möglichen Stellungen einnehmen. Es entstehen hiedurch die Zerstreuungen von $r+1$ Elementen in $p-rk-k+r+1$ Fächer. Damit verbinden sich alle möglichen Kugelgruppen zur $(p-rk-k)$ten Classe. Die auszuscheidende Gruppen-Anzahl ist

$$A_2 = \frac{(p-(r+1)k+r+1)^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} m^{p-(r+1)k}.$$

Werden diese Schlüsse weiter fortgesetzt, so ergiebt sich die von A_2 weiter auszuscheidende Gruppen-Anzahl. Sie ist

$$A_3 = \frac{(p-(r+2)k+r+2)^{r+2|-1}}{1^{r+2|-1}} m^{p-(r+2)k}$$

u. s. w. Die dem Ereignifs günstige Gruppen-Anzahl (A_k^r) ist

$$4.\quad A_k^r = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}} m^{p-rk} - \frac{(p-(r+1)k+1)^{r+1|1}}{1^{r+1|1}} m^{p-(r+1)k}$$
$$+ \frac{(p-(r+2)k+1)^{r+2|1}}{1^{r+2|1}} m^{p-(r+2)k} - \ldots$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$5.\quad w = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1} m^{rk}} - \frac{(p-(r+1)k+1)^{r+1|1}}{1^{r+1|1} m^{(r+1)k}} + \frac{(p-(r+2)k+1)^{r+2|1}}{1^{r+2|1} m^{(r+2)k}} - \ldots$$

Man sieht leicht, dafs die Gleichungen (4. und 5.) die spätern Glieder der Gleichungen (1. und 2.) in sich begreifen. Sie beginnen mit dem $r$ten Gliede von (1. und 2.).

Durch die Gleichungen (4. und 5.) läfst sich auch folgende Frage beantworten. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den obigen Bedingungen k bestimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung in p Ziehungen wenigstens r und höchstens $s$mal, also r, $r+1$, $r+2$, ... $s$mal erscheinen werden?

Die Zahl der günstigen Gruppen ergiebt sich, wenn $s+1$ statt r in (4.) gesetzt, die erhaltene Gruppen-Anzahl von (4.) abgezogen und durch m^p dividirt wird. Bezeichnet man die Zahl der Gruppen, in welchen k be-

stimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung wenigstens $r$mal und höchstens $s$mal erscheinen, durch $A_k^{r,s}$, so läfst sich die Zahl der Gruppen wie folgt ausdrücken:

$$6. \quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$7. \quad w = \frac{A_k^r - A^{s+1}}{m^p} = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1} m^{rk}} - \frac{(p-(r+1)k+1)^{r+1|1}}{1^{r+1|1} m^{(r+1)k}} + \frac{(p-(r+2)k+1)^{r+2|1}}{1^{r+2|1} m^{(r+2)k}} - \dots$$
$$- \frac{(p-(s+1)k+1)^{s+1|1}}{1^{s+1|1} m^{(s+1)k}} + \frac{(p-(s+2)k+1)^{s+2|1}}{1^{s+2|1} m^{(s+2)k}} - \frac{(p-(s+3)k+1)^{s+3|1}}{1^{s+3|1} m^{(s+3)k}} + \dots$$

Die Gleichungen (1. 4. und 6.) lösen Aufgaben aus der Combinationslehre auf. Die Gleichung (1.) giebt die Anzahl der Gruppen, in welchen k bestimmte Elemente in einer bestimmten Ordnung wenigstens einmal vorkommen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden; die Gleichung (4.) giebt diejenigen, in welchen diese Elemente wenigstens $r$mal vorkommen; die Gleichung (6.) diejenigen, in welchen sie wenigstens r und höchstens $s$mal vorkommen.

Laplace hat die Gleichung (3.) (einen besonderen Fall von (2.)) in dem VIIten Bande der „Mémoires de Mathémat. et Phys. présentés à l'Académie roy. des Sciences 1773 (Probl. XII.)" mittels Integration endlicher Differential-gleichungen gegeben. *J. Trembley* hat sie im 10ten Hefte des *Hindenburg*schen Archivs der reinen und angewandten Mathem. (1799) mittels der Methode der wiederkehrenden Reihen entwickelt. So viel Aufwand des höhern Calculs scheint nicht nöthig, um einen so einfachen Fall aus der Combinationslehre zu ermitteln. Die Gleichungen dieses Paragraphs sind hier hauptsächlich deshalb mitgetheilt, um eine Entwicklung zu geben, die uns bei den nachfolgenden schwierigern Fällen Dienste leisten wird.

§. 27.

In einer Urne befinden sich n Kugeln, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnet. m Kugeln, deren Zeichen in der Reihe der Zahlen folgen, werden besonders beachtet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus und legt jedesmal die gezogene Kugel in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von den m gesonderten Kugeln k Kugeln (wenigstens) hinter einander erscheinen werden, welche die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen haben?

Die Zahl der günstigen Fälle kommt mit folgender Gruppen-Anzahl überein.

Es werden die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe gebildet und darunter m Elemente, deren Stellenzahlen nach der Reihe der Zahlen folgen, besonders beachtet. Wie grofs ist die Anzahl der Gruppen, in welchen wenigstens k Elemente in der natürlichen Reihe der Stellenzahlen erscheinen?

Diejenigen Gruppen, welche der Frage genügen, sind, wenn die Elemente, welche die ersten m Stellenzahlen haben, beachtet werden, folgende:

$$1.\quad \begin{array}{lllll} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{k+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-k+1} & a_{m-k+2} & & \cdots & a_m \end{array} = G$$

Ihre Zahl ist $m-k+1$, wie sich leicht zeigt. Das Vorkommen sämmtlicher auflösenden Gruppen soll durch G_1 bezeichnet werden *).

Der vorliegenden Frage wird genügt, wenn eine der in (1.) angegebenen Gruppen in k Ziehungen gerade von der ersten, oder gerade von der zweiten u. s. w., oder gerade von der $(p-k+1)$ten Ziehung an erscheint, ohne dafs selbst eine der auflösenden Gruppen in den frühern Ziehungen erschienen wäre. Diese Bedingung kann der Natur der Sache nach von der $(k+1)$ten Ziehung an eintreten. Von hier an mufs sie in den Calcul aufgenommen werden. Zählt man nun die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe nach einer Richtung hin (etwa von der Linken zur Rechten), so können mit Rücksicht auf (1.) folgende Fälle eintreten:

a. Eine der dort genannten Gruppen erscheint von der *ersten* Stelle an. Die Zahl dieser Gruppen ist $m-k+1$. Jeder einzelnen Gruppe kann jede beliebige Anordnung von n Elementen in den $p-k$ folgenden Stellen angereiht werden. Die Zahl der nachfolgenden Gruppen ist n^p. Die Zahl der hiedurch bedingten günstigen Fälle ist

$$A_1 = (m-k+1)n^{p-k}.$$

---

*) Die nämlichen Schlüsse gelten, wenn m andere Elemente, deren Stellenzahlen die genannte Ordnung haben, herausgehoben werden; sie gelten sogar noch dann, wenn m Elemente ausgewählt werden, deren Stellenzahlen einander in ganz beliebiger Ordnung folgen.

b. Eine der unter (1.) angegebenen Gruppen erscheint gerade von der *zweiten* Stelle an. Dies erfordert die Bedingung, dafs keiner auflösenden Gruppe ein Element an der ersten Stelle vorhergehen darf, dessen Stellenzahl um die Einheit niedriger ist, als die des Anfangs-Elements. Geschähe dies, so wäre dadurch eine Gruppe gezählt, die unter den in (a) gezählten mitbegriffen ist. Die hiedurch bedingte Gruppen-Anzahl ist in folgendem Ausdruck enthalten:

$$\begin{array}{c|l}a_1 & a_1 a_2 \cdots a_k \\ a_2 & \\ \vdots & \\ a_n & \end{array} + \begin{array}{c|l}a_2 & a_2 a_3 \cdots a_{k+1} \\ a_3 & \\ \vdots & \\ a_n & \end{array} + \begin{array}{c|l}a_1 & a_3 a_4 \cdots a_{k+2} \\ a_3 & \\ a_4 & \\ \vdots & \\ a_n & \end{array} + \begin{array}{c|l}a_1 & a_4 a_5 \cdots a_{k+3} \\ a_2 & \\ a_4 & \\ \vdots & \\ a_n & \end{array} \cdots + \begin{array}{c|l}a_1 & a_{m-k+1} \cdots a_n \\ a_2 & \\ \vdots & \\ a_{m-k-1} & \\ a_{m-k+1} & \\ \vdots & \\ a_n & \end{array}$$

$$= \Sigma P$$

Der Ausdruck läfst sich dadurch abkürzen, dafs man jeder auflösenden Gruppe alle Elemente ohne Unterschied vortreten läfst und dann diejenigen ausscheidet, in denen das Element, welches die nächst niedrigere Stellenzahl hat, der auflösenden Gruppe vorsteht. Er geht hiedurch in folgenden über:

$$\Sigma P = \begin{array}{c|l} a_1 & a_1 a_2 \cdots a_k \\ a_2 & a_2 a_3 \cdots a_{k+1} \\ a_3 & a_3 a_4 \cdots a_{k+2} \\ \vdots & \vdots \\ a_n & a_{m-k+1} \cdots a_m \end{array} \begin{array}{c|l} -a_1 & a_2 a_3 \cdots a_{k+1} \\ -a_2 & a_3 a_4 \cdots a_{k+2} \\ -a_3 & a_4 a_5 \cdots a_{k+3} \\ \vdots & \\ -a_{m-k} & a_{m-k+1} \cdots a_m \end{array} = P'(a_1, a_2, \cdots a_m)^1 G_1 - S_1$$

Die abzuziehenden Gruppen, welche hier durch S_1 bezeichnet werden, haben eine Dimension mehr als die auflösenden. Die Zahl, auf welche sie führen, ist um eine Einheit geringer, als die Zahl der auflösenden Gruppen. Die durch den Ausdruck bedingte Gruppenzahl ist

$$n(m-k+1)-(m-k).$$

Jede beliebige Anordnung von n Elementen kann jeder einzelnen von den eben genannten Gruppen an den spätern $p-k-1$ Stellen folgen. Die Zahl der hiedurch bedingten günstigen Fälle ist

$$A_2 = [n(m-k+1)-m-k]n^{p-k-1} = (m-k+1)n^{p-k} - (m-k)n^{p-k-1}.$$

c. Eine der unter (1.) aufgeführten Gruppen erscheint gerade von der *dritten* Stelle an. Ist dies der Fall, so darf keiner der genannten Gruppen das Element unmittelbar vorangehen, oder an der zweiten Stelle erscheinen,

welches die um eine Einheit niedrigere Stellenzahl hat. Geschähe dies, so würde eine Gruppe, die schon unter (6.) gezählt ist, noch einmal gezählt. An der ersten Stelle kann jedes Element ohne Unterschied erscheinen. Behält man die in (6.) angenommene Bezeichnung bei, so ergeben sich folgende Gruppen:

$$P(a_1, a_n)^1 \Sigma P = P(a_1, a_n)^1 [P'(a_1, a_n)^1 G_1 - S_1].$$

Ihre Anzahl ist

$$n[n(m-k+1)-(m-k)].$$

Jede beliebige Zusammenstellung aus n Elementen kann diesen Gruppen an den $p-k-2$ spätern Stellen folgen. Die Zahl der dadurch bedingten günstigen Fälle ist

$$A_3 = (m-k+1)n^{p-k} - (m-k)n^{p-k-1}.$$

d. Erscheint eine der unter (1.) genannten Gruppen gerade von der *vierten* Stelle an, so giebt die Anwendung der bisher gemachten Bemerkungen folgende Gruppen-Anzahl:

$$A_3 = P'[a_1, a_n]^2 [P'[a_1, a_n]^1 G_1 - S_1] P'[a_1, a_n]^{p-k-3}$$
$$= (m-k+1)n^{p-k} - (m-k)n^{p-k-1}.$$

Die auflösenden Gruppen können bis auf die $(p-k+1)$te Stelle fortrücken.

Wird diese Betrachtungsweise fortgesetzt, so ergiebt sich für die Anzahl der günstigen Fälle, von der $(p-k+1)$ten Stelle an:

$$A_{p-k+1} = P'[a_1, a_n]^{p-k-1} [P'[a_1, a_n]^1 G_1 - S_1]$$
$$= (m-k+1)n^{p-k} - (m-k)n^{p-k-1}.$$

Die Summirung der unter $A_1, A_2, A_3, \ldots. A_{p-k+1}$ gefundenen Anzahlen giebt folgenden Ausdruck:

$$2. \quad B = (p-k+1)(m-k+1)n^{p-k} - (p-k)(m-k)n^{p-k-1}.$$

Die Schlufsweise ist, wie schon oben bemerkt, so lange richtig, bis das Anfangs-Element einer der auflösenden Gruppen die $(k+1)$te Stelle, oder eine spätere erreicht. In diesem Falle können an den vorhergehenden Stellen Gruppen erscheinen, die unter den in (2.) aufgeführten mitbegriffen sind. Ihre Anzahl mufs gesucht und ausgeschieden werden. Bei der Zählung dieser Gruppen kommt die in (*a*, *b*, *c*, *d* u. s. w.) aufgestellte Behandlungsart selbst wieder zur Anwendung und erleichtert die Rechnung. Es ergiebt sich für die Aufsuchung der fraglichen Gruppen folgendes Schema:

$$
\begin{aligned}
3.\quad & P'(a_1, a_n)^{k-1}(\Sigma P) P'(a, a_n)^{p-2k} \\
& + P'(a_1, a_n)^k (\Sigma P) P(a, a_n)^{p-2k-1} \ldots P'(a_1, a_n)^{p-k-1}(\Sigma P) \\
& = [P(a_1, a_n)^k\ G_1 - P'(a_1, a_n)^{k-1} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-2k} \\
& + [P'(a_1, a_n)^{k+1} G_1 - P'(a_1, a_n)^k\ S_1] P'(a_1, a_n)^{p-2k-1} \\
& + [P'(a_1, a_n)^{k+2} G_1 - P'(a_1, a_n)^{k+1} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-2k-2} \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + [P'(a_1, a_n)^{p-k} G - P'(a_1, a_n)^{p-k-1} S_1] P'(a_1, a_n)^0.
\end{aligned}
$$

Die Ausdrücke $P'(a_1, a_n)^k$, $P'(a_1, a_n)^{k+1}$, ... $P'(a_1, a_n)^{p-k}$ rechts des Gleichheitszeichens in (3.) unterliegen der bisher aufgestellten Behandlungsart. Folgende Fälle sind daher zu untersuchen.

e. Die Zahl der Gruppen, welche wegen des ersten Ausdrucks $P'(a_1, a_n)^k G$ (in der ersten verticalen Reihe) ausgeschieden werden müssen, ergiebt sich aus (2.), wenn man $p = k$ setzt. Auf jede dieser Gruppen können n Elemente in jeder beliebigen Ordnung an $p - 2k$ spätern Stellen folgen. Die Anzahl der hiedurch bedingten Gruppen ist

$$B_1 = 1 \cdot (m - k + 1)(m - k + 1) \cdot n^{p-2k}.$$

f. Die Zahl der Gruppen, welche wegen $P'(a_1, a_n)^{k+1}$ (im zweiten Ausdrucke der ersten Verticalreihe) ausgeschieden werden müssen, ergiebt sich, wenn die in (*a* und *b*) gemachten Bemerkungen gleichzeitig angewendet werden, oder, was dasselbe ist, wenn in (2.) $k + 1$ statt p gesetzt wird. Verbindet man den hiedurch entstehenden Ausdruck mit G_1 und mit der Zahl der Gruppen, welche an den $p - 2k - 1$ spätern Stellen folgen können, so ist die auszuscheidende Gruppen-Anzahl

$$
\begin{aligned}
B_2 &= [2(m - k + 1)n - 1 \cdot (m - k)](m - k + 1)n^{p-2k-1} \\
&= 2(m - k + 1)(m - k + 1)n^{p-2k} - 1(m - k + 1)(m - k)n^{p-2k-1}.
\end{aligned}
$$

g. Behandelt man $P'(a_1, a_n)^{k+2}$ (im dritten Ausdrucke der ersten Verticalreihe) auf gleiche Weise, so erhält man folgende Zahl auszuscheidender Gruppen:

$$B_3 = 3(m - k + 1)(m - k + 1)n^{p-2k} - 2(m - k + 1)(m - k)n^{p-2k-1}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so giebt der letzte Ausdruck in der ersten Verticalreihe für die Zahl der auszuscheidenden Gruppen:

$$B_{p-2k+1} = (p-2k+1)(m-k+1)(m-k+1)n^{p-2k} - (p-2k)(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1}.$$

Die Ausdrücke B_1, B_2, B_3, ... B_{p-2k+1} lassen sich summiren. Ihre Summirung giebt folgenden Ausdruck:

$$B_s = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)^2 n^{p-2k} - \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1}.$$

Die Bemerkungen in (*e*, *f*, *g* u. s. w.) lassen sich für die Ausdrücke in der zweiten Verticalreihe in (3.) vom zweiten Gliede an wiederholen. Es ist daher k, $k+1$, $k+2$, ... $p-k-1$ statt p in (2.) zu setzen und jeder dadurch erhaltene Ausdruck wegen S_1 mit $m-k$ und ferner mit der ergänzenden Potenz zu multipliciren. Die daraus sich ergebende Reihe ist um ein Glied kürzer, als die eben gefundene. Es ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} B_{s-1} = -[\; & 1\cdot(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} \\ & +2(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} - 1(m-k)(m-k)n^{p-2k-2} \\ & +3(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} - 2(m-k)(m-k)n^{p-2k-2} \\ & +4(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} - 3(m-k)(m-k)n^{p-2k-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +(p-2k)(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} - (p-2k-1)(m-k)(m-k)n^{p-2k-2}] \\ = & -\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)(m-k)n^{p-2k-1} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-k)n^{p-2k-2}. \end{aligned}$$

In der zweiten verticalen Reihe von (3.) deutet S_1 auf Gruppen von der $(k+1)$ten Dimension. Durch den Vortritt von den Versetzungen zur $(k-1)$ten Classe können Gruppen entstehen, die sich bis zur $(2k)$ten Dimension erheben, die sich dadurch als ein Ganzes characterisiren und die besondere Ausscheidungen erfordern. Dadurch wird eine weitere Reihe von Ausscheidungen nöthig, welche durch folgende Zusammenstellung angedeutet werden soll:

$$\begin{aligned} 4.\quad & P'(a_1, a_n)^{k-1}S_1\cdot P'(a_1, a_n)^{p-2k} \\ & +P'(a_1, a_n)^1\cdot P'(a_1, a_n)^{k-1}S_1\cdot P'(a_1, a_n)^{p-2k-1} \\ & +P'(a_1, a_n)^2\cdot P'(a_1, a_n)^{k-1}S_1\cdot P'(a_1, a_n)^{p-2k-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +P'(a_1, a_n)^{p-2k}\cdot P'(a_1, a_n)^{k-1}S_1\cdot P'(a_1, a_n)^0. \end{aligned}$$

h. Die Anzahl der Gruppen, deren Ausscheidung der in allen Gliedern der vorliegenden Darstellung vorkommende Ausdruck

$$P'(a_1, a_n)^{k-1}S_1$$

verlangt, ergiebt sich, wenn diejenigen Gruppen in $P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k-1}$ aufgezählt werden, welche $k-1$ Elemente von den in Betracht kommenden m Elementen enthalten, deren Stellenzahlen in der Reihenfolge der gewöhnlichen

Zahlen erscheinen und welche die Eigenschaft haben, mit der Stellenzahl des Anfangs-Elementes der nachfolgenden in S_1 enthaltenen Gruppen eine Gruppe von k Elementen nach der Ordnung der gewöhnlichen Zahlen zu bilden. Die Gruppen, auf welche diese Entwicklung führt, sind folgende:

$$\begin{array}{l}
a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_{k-1} \,|\, a_k \,|\, a_{k+1} a_{k+2} \cdots\cdots a_{2k} \\
a_2 a_3 a_4 \cdots\cdots a_k \,|\, a_{k+1} \,|\, a_{k+2} a_{k+3} \cdots\cdots a_{2k+1} \\
a_3 a_4 a_5 \cdots\cdots a_{k+1} \,|\, a_{k+2} \,|\, a_{k+3} a_{k+4} \cdots\cdots a_{2k+2} \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
a_{m-2k+1} \cdots\cdots a_{m-k+1} \,|\, a_{m-k} \,|\, a_{m-k+1} \cdots\cdots a_m .
\end{array}$$

Ihre Zahl, die durch G_2 bezeichnet werden soll, ist $m-2k+1$. In Rücksicht auf die Zahl der nachfolgenden Gruppen ergiebt sich folgende Anzahl auszuscheidender Gruppen:

$$C_1 = (m-2k+1)\,n^{p-2k}.$$

i. Der zweite Ausdruck in (4.) erfordert wegen $P'(a_1, a_n)^{k-1} S_1$ die nemliche Behandlung, wie in (*h*). Dabei ist, wie in (*b*) bemerkt, die unerläfsliche Bedingung, dafs keiner Gruppe ein Element, dessen Stellenzahl um eine Einheit kleiner ist als die des Anfangs-Elements der Gruppe, in der ersten Stelle vorkommen darf, weil dieser Fall schon in (*h*) begriffen ist. Es mufs daher eine ähnliche Unterscheidung wie in (*b*) gemacht werden. Dabei ist jedoch zu bemerken, dafs nur $m-2k$ Elemente in Betracht kommen. Es findet sich folgender Ausdruck:

$$\begin{array}{c|l}
a_1 & a_1 a_2 \cdots a_{2k} \\
a_2 & \\
a_3 & \\
\vdots & \\
a_n &
\end{array}
+
\begin{array}{c|l}
a_2 & a_2 a_3 \cdots a_{2k+1} \\
a_3 & \\
a_4 & \\
\vdots & \\
a_n &
\end{array}
+
\begin{array}{c|l}
a_1 & a_3 a_4 \cdots a_{2k+2} \cdots \\
a_3 & \\
a_4 & \\
\vdots & \\
a_n &
\end{array}
\cdots
\begin{array}{c|l}
a_1 & a_{m-2k+1} \cdots a_m \\
a_2 & \\
\vdots & \\
a_{m-2k-1} & \\
a_{m-2k+1} & \\
\vdots & \\
a_n &
\end{array}
= \Sigma Q.$$

Auch dieser Ausdruck kann vereinfacht werden, wenn man alle Elemente ohne Unterschied vor jede Gruppe treten läfst, und diejenigen abzieht, in welchen das Element mit der nächst niedrigeren Stellenzahl dem Anfangs-Elemente vorgeht. Hiedurch geht der obige Ausdruck in folgenden über:

$$\begin{aligned}
\Sigma Q = P'(a_1, a_2, \cdots a_n)^1 G_2 & - a_1 \,|\, a_2 a_3 \cdots\cdots a_{2k+1}, \\
& - a_2 \,|\, a_3 a_4 \cdots\cdots a_{2k+2}, \\
& - a_3 \,|\, a_4 a_5 \cdots\cdots a_{2k+3}, \\
& \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
& - a_{m-2k} \,|\, a_{m-2k+1} \cdots\cdots a_m .
\end{aligned}$$

Bezeichnet man die abzuziehenden Gruppen, welche der $(2k+1)$ten Dimension angehören, durch S_2, und bemerkt, dafs ihre Zahl $m-2k$ ist, so ergiebt sich

$$\Sigma Q = P'[a_1, a_2, \dots a_n]^1 G_2 - S_2 = n(m-2k+1)-(m-2k).$$

In Rücksicht auf die begleitenden Gruppen an den $p-2k-1$ nachfolgenden Stellen ist

$$C_2 = (m-2k+1)n^{p-2k}-(m-2k)n^{p-2k-1}.$$

Die Art, wie man die folgenden Ausdrücke in (4.) behandelt werden müssen, ist in (i) angegeben und bleibt dieselbe. Man erhält für die Zahl der Gruppen, welche wegen des dritten Ausdrucks auszuscheiden sind:

$$C_3 = (m-2k+1)n^{p-2k}-(m-2k)n^{p-2k-1}.$$

Wird dies fortgesetzt, so ergiebt sich für den letzten Fall:

$$C_{p-2k+1} = n^{p-2k}[G_2 - S_2] = (m-2k+1)n^{p-2k}-(m-2k)n^{p-2k-1}.$$

Die Summirung der Werthe von C_1, C_2, C_3, ... C_{p-2k+1} giebt folgenden Ausdruck:

$$-B_{s+1} = -(p-2k+1)(m-2k+1)n^{p-2k}+(p-2k)(m-2k)n^{p-2k-1}.$$

Die Vereinigung von $B_s - B_{s-1} - B_{s+1}$ aber giebt für die Gesammtzahl aller auszuscheidenden Gruppen:

$$5.\quad C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)^2 n^{p-2k} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1}$$
$$+\frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)^2 n^{p-2k-2} - [(p-2k+1)(m-2k+1)n^{p-2k}$$
$$-(p-2k)(m-2k)n^{p-2k-1}].$$

Ihrer Entstehung zufolge läfst sich die vorstehende Formel auf folgende Weise ausdrücken:

$$6.\quad C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} G_1 G_1 n^{p-2k} - \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}} \begin{vmatrix} G_1 & S_1 \\ S_1 & G_1 \end{vmatrix} n^{p-2k-1}$$
$$+\frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} S_1 S_1 n^{p-2k-2} - [(p-2k+1)G_2 n^{p-2k} - (p-2k)S_2 n^{p-2k-1}].$$

Die der Gleichung (5.) zu Grunde liegende Formel ist so lange richtig, als eine der auflösenden Gruppen von der $(2k+1)$ten, oder von einer spätern Stelle an erscheint. In diesem Falle können an den $2k$, $2k+1$, $2k+2$, ... $p-2k$ vorhergehenden Stellen Gruppen erscheinen, welche der oben aufgestellten Bedingung genügen. Sie sind anzugeben und auszuscheiden. Bei Ermittlung dieser Gruppen kann die Gleichung (5.) selbst wieder benutzt werden. Dies

giebt folgendes Schema:

$$7.\quad \begin{array}{l} [P'(a_1, a_n)^{2k} G_1 - P'(a_1, a_n)^{2k-1} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-3k} \\ [P'(a_1, a_n)^{2k+1} G_1 - P'(a_1, a_n)^{2k} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-3k-1} \\ [P'(a_1, a_n)^{2k+2} G_1 - P'(a_1, a_n)^{2k+1} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-3k-2}. \\ \dots\dots\dots\dots \\ [P'(a_1, a_n)^{p-2k} G_1 - P'(a_1, a_n)^{p-2k-1} S_1] P'(a_1, a_n)^{0}. \end{array}$$

Alle Ausdrücke der ersten verticalen Reihe sind nach (5.) zu behandeln, indem man allmälig $2k$, $2k+1$, $2k+2$, ... $p-2k$ statt p setzt, die angezeigten Gruppen-Anzahlen angiebt und die Resultate summirt. Die Ausführung der angedeuteten Rechnung giebt

$$D_s = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^3 n^{p-3k} - 2\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^2(m-k)n^{p-3k-1}$$
$$+\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m-k)^2 n^{p-3k-2} - \left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-2k+1)n^{p-2k}\right.$$
$$\left. - \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-2k)n^{p-2k-1}\right].$$

Alle Ausdrücke der zweiten verticalen Reihe, vom zweiten an, sind ganz auf dieselbe Weise zu behandeln. Dadurch entsteht eine Reihe, die um ein Glied kürzer ist; denn es sind die Werthe $2k$, $2k+1$, $2k+2$, ... $p-2k-1$ statt p einzuführen, die Gruppen-Anzahlen anzugeben und zu summiren. Dieses giebt

$$-D_{s-1} = -\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^2(m-k)n^{p-3k-1}$$
$$+2\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m-k)^2 n^{p-3k-2} - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k)^3 n^{p-3k-3}$$
$$+\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k+1)n^{p-3k-1} - \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k)n^{p-3k-2}.$$

Aufser dieser Behandlungsart giebt es noch für sämmtliche Glieder der zweiten verticalen Reihe eine zweite. Durch den Vortritt von $P(a_1, a_n)^{k-1}$ vor S_1 entstehen Gruppen, die, in Verbindung mit den in S_1 begriffenen Gruppen, zur Dimension $2k$ sich erheben und dadurch Gruppen von der Form G_2 bilden, deren Natur in (h und i) erörtert wurde. Dies giebt den Ausdruck

$$8.\quad \begin{array}{l} -[P'(a_1, a_n)^{k} G_2 - P'(a_1, a_n)^{k-1} S_2] P'(a_1, a_n)^{p-3k} \\ -[P'(a_1, a_n)^{k+1} G_2 - P'(a_1, a_n)^{k} S_2] P'(a_1, a_n)^{p-3k-1} \\ -[P'(a_1, a_n)^{k+2} G_2 - P'(a_1, a_n)^{k+1} S_2] P'(a_1, a_n)^{p-3k-2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ -[P'(a_1, a_n)^{p-2k} G_2 - P'(a_1, a_n)^{p-2k-1} S_2] P'(a_1, a_n)^{0}. \end{array}$$

Die Schlüsse (e, f u. s. w.) sind, wie leicht zu sehen, auf sämmtliche Glieder der ersten Reihe, so wie auf die der zweiten Reihe, vom zweiten Gliede an, anwendbar; die Resultate sind mit den begleitenden Gruppen-Anzahlen zu verbinden und dann zu summiren. Dann ist in (2.) der Reihe nach $p = k, k+1, k+2, \ldots (p-2k)$, darauf $= k, k+1, k+2, \ldots (p-2k-1)$ zu setzen und die für die erste Reihe sich ergebenden Ausdrücke sind mit $m-2k+1$, die für die zweite sich ergebenden mit $m-2k$ und mit den ergänzenden Gruppen-Anzahlen zu verbinden. Die erste verticale Reihe in (8.) führt zu folgendem Ausdrucke:

$$-D_{s+1} = -\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m-2k+1)n^{p-3k} + \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k+1)n^{p-3k-1},$$

die zweite zu folgendem:

$$D_{s+2} = \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-2k)n^{p-3k-1} - \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k)n^{p-3k-2}.$$

Die zweite verticale Reihe in (8.) gestattet noch eine zweite Behandlungs-Art. Durch den Vortritt von den in $P'(a_1, a_n)^{k-1}$ angezeigten Gruppen vor S_2 entstehen Gruppen, welche durch Anreihung des Schlufs- und Anfangs-Elements sich zur Dimension $3k$ erheben. Sie characterisiren sich als Ganzes von der nachstehenden Form und Anzahl:

$$\begin{array}{llll}
a_1 a_2 \cdots a_{k-1} & a_k & a_{k+1} \cdots a_{3k} \\
a_2 a_3 \cdots a_k & a_{k+1} & a_{k+2} \cdots a_{3k+1} \\
a_3 a_4 \cdots a_{k+1} & a_{k+2} & a_{k+3} \cdots a_{3k+2} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{m-3k+1} \cdots a_{m-3k-1} & a_{m-3k} & a_{m-3k+1} \cdots a_m.
\end{array}$$

Sie sollen durch G_3 bezeichnet werden. Ihre Anzahl ist $m-3k+1$. Die Berechnung ihrer Anzahl erfordert die Behandlungs-Art, welche in (b und i) vorkam. Dadurch entstehen Gruppen von den Dimensionen $3k$ und $3k+1$, die durch G_3 und S_3 bezeichnet werden sollen. Sie sind in folgendem Schema enthalten:

$$\begin{array}{ll}
9. & G_3 P(a, a_2, \cdots a_n)^{p-3k} \\
 & [P'(a_1, a_n)^1 G_3 \quad - S_3] P'(a_1, a_n)^{p-3k-1} \\
 & [P'(a_1, a_n)^2 G_3 \quad - P'(a_1, a_n)^1 S_3] P'(a_1, a_n)^{p-3k-2} \\
 & [P'(a_1, a_n)^3 G_3 \quad - P'(a_1, a_n)^2 S_3] P'(a_1, a_n)^{p-3k-3} \\
 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
 & [P'(a_1, a_n)^{p-3} G_3 - P'(a_1, a_n)^{p-3k-1} S_3] P'(a_1, a_n)^0.
\end{array}$$

Die erste verticale Reihe hat $p-3k+1$ Glieder. Jedes giebt, mit Rücksicht auf die dasselbe begleitende Gruppen-Anzahl, $(m-3k+1)n^{p-3k}$. Ihre Summe ist daher

$$D_{s+3} = (p-3k+1)(m-3k+1)^{p-3k}.$$

Die zweite verticale Reihe hat nur $p-3k$ Glieder. Jedes Glied hat Gruppen von der $(3k+1)$ten Dimension. Form und Anzahl dieser Gruppen ist

$$\begin{array}{rl} S_3 = a_1 | & a_2\, a_3 \cdots a_{3k+1} = m-3k. \\ a_2 | & a_3\, a_4 \cdots a_{3k+2} \\ a_3 | & a_4\, a_5 \cdots a_{3k+3} \\ \cdot\; \cdot & \cdot\; \cdot\; \cdot \\ a_{m-3k} | & a_{m-3k+1} \cdots a_m \end{array}$$

Werden die begleitenden Gruppen-Anzahlen berücksichtigt, so giebt jedes Glied $(m-3k)n^{p-3k-1}$. Hieraus ergiebt sich die Summe

$$-D_{s+4} = -(p-3k)(m-3k)n^{p-3k-1}.$$

Werden nun die Werthe D_s, D_{s-1}, D_{s+1}, D_{s+2}, D_{s+3}, D_{s+4} zusammengezählt, so findet sich, nach gehöriger Anordnung, folgende von (5.) auszuscheidende Anzahl von Gruppen:

$$\begin{aligned} 10.\quad D = {} & \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^3 n^{p-3k} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^2(m-k)n^{p-3k-1} \\ & + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m-k)^2 n^{p-3k-2} - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k)^3 n^{p-3k-3} \\ & - 2\Big[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-2k+1)n^{p-3k} - \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}\left|\begin{matrix}(m-k+1)(m-2k)\\(m-k)(m-2k+1)\end{matrix}\right| n^{p-3k-1} \\ & \qquad + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k)n^{p-3k-2}\Big] \\ & + (p-3k+1)(m-3k+1)n^{p-3k} - (p-3k)(m-3k)n^{p-3k-1}. \end{aligned}$$

In Rücksicht auf die Entstehung dieses Ausdrucks ergiebt sich folgendes Schema:

$$\begin{aligned} 11.\quad D = {} & \Big[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}G_1G_1G_1 n^3 - \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\left|\begin{matrix}G_1G_1S_1\\G_1S_1G_1\\S_1G_1G_1\end{matrix}\right| n^2 + \frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}\left|\begin{matrix}G_1S_1S_1\\S_1G_1S_1\\S_1S_1G_1\end{matrix}\right| n \\ & \qquad - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}S_1S_1S_1\Big] n^{p-3k-3} \\ & - \Big[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\left|\begin{matrix}G_1G_2\\G_2G_1\end{matrix}\right| n^2 - \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}\left|\begin{matrix}G_1S_2\\S_2G_1\\S_1G_2\\G_2S_1\end{matrix}\right| n + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\left|\begin{matrix}S_1S_2\\S_2S_1\end{matrix}\right|\Big] n^{p-3k-2} \\ & + \Big[\frac{(p-3k+1)^{1|1}}{1^{1|1}}G_3 n - \frac{(p-3k)^{1|1}}{1^{1|1}}S_3\Big] n^{p-3k-1}. \end{aligned}$$

Die bisher befolgte Schlufsweise ist so lange richtig, bis eine der auflösenden Gruppen in die $(3k+1)$te oder in eine spätere Stelle gerückt ist. Von da an sind neuerdings Ausscheidungen nöthig. Die Zahl der auszuscheidenden Gruppen ergiebt sich, wenn man zuerst die Formel (10.), dann die Formel (5.) und endlich die Formel (2.) wiederholt anwendet. Im ersten Falle treten die Gebilde G_1 und S_1, im zweiten G_2 und S_2, im dritten G_3 und S_3 auf. Aufserdem treten endlich Gebilde von der Form G_4 und S_4 auf. Dabei ist zu merken, dafs $G_4 = n-4k+1$ und $S_4 = n-4k$ gesetzt werden mufs. Die Bedeutung von $G_1, G_2, G_3; S_1, S_2, S_3$ ist aus dem Frühern bekannt. Das Schema, welches sich aus diesen Bemerkungen für die Anzahl der auszuscheidenden Gruppen ergiebt, ist:

$$12.\quad E =$$

$$\Big[\frac{(p-4k+1)^{4|1}}{1^{4|1}} G_1G_1G_1G_1 n^4 - \frac{(p-4k)^{4|1}}{1^{4|1}} \left|\begin{array}{c} G_1G_1G_1S_1 \\ G_1G_1S_1G_1 \\ G_1S_1G_1G_1 \\ S_1G_1G_1G_1 \end{array}\right| n^3 + \frac{(p-4k-1)^{4|1}}{1^{4|1}} \left|\begin{array}{c} G_1G_1S_1S_1 \\ G_1S_1G_1S_1 \\ S_1G_1G_1S_1 \\ G_1S_1S_1G_1 \\ S_1G_1S_1G_1 \\ S_1S_1G_1G_1 \end{array}\right| n^2$$

$$- \frac{(p-4k-2)^{4|1}}{1^{4|1}} \left|\begin{array}{c} G_1S_1S_1S_1 \\ S_1G_1S_1S_1 \\ S_1S_1G_1S_1 \\ S_1S_1S_1G_1 \end{array}\right| n + \frac{(p-4k-3)^{4|1}}{1^{4|1}} S_1S_1S_1S_1 \Big] n^{p-4k-4}$$

$$-\Big[\frac{(p-4k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} \left|\begin{array}{c} G_1G_1G_2 \\ G_1G_2G_1 \\ G_2G_1G_1 \end{array}\right| n^3 - \frac{(p-4k)^{3|1}}{1^{3|1}} \left|\begin{array}{c} G_1G_1S_2 \\ G_1S_2G_1 \\ S_2G_1G_1 \\ \hline G_1S_1G_2 \\ S_1G_1G_2 \\ G_1G_2S_1 \\ \hline S_1G_1G_2 \\ G_1S_1G_2 \\ G_1G_2S_1 \end{array}\right| n^2 + \frac{(p-4k-1)^{3|1}}{1^{3|1}} \left|\begin{array}{c} G_1S_1S_2 \\ S_1G_1S_2 \\ S_1S_2G_1 \\ \hline S_1G_1S_2 \\ S_1S_2G_1 \\ S_2S_1G_1 \\ \hline S_1S_1G_2 \\ S_1G_2S_1 \\ G_2S_1S_1 \end{array}\right| n - \frac{(p-4k-2)^{3|1}}{1^{3|1}} \left|\begin{array}{c} S_1S_1S_2 \\ S_1S_2S_1 \\ S_2S_1S_1 \end{array}\right| \Big] n^{p-4k-3}$$

$$+\Big[\frac{(p-4k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \left|\begin{array}{c} G_1G_3 \\ G_3G_1 \\ \hline G_2G_2 \end{array}\right| n^2 - \frac{(p-4k)^{2|1}}{1^{2|1}} \left|\begin{array}{c} G_1S_3 \\ S_3G_1 \\ \hline S_1G_3 \\ G_3S_1 \\ \hline G_2S_2 \\ S_2G_2 \end{array}\right| n + \frac{(p-4k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} \left|\begin{array}{c} S_1S_3 \\ S_3S_1 \\ \hline S_2S_2 \end{array}\right| \Big] n^{p-4k-2}$$

$$-[(p-4k+1)G_4 n - (p-4k)S_4] n^{p-4k-1}.$$

Das allgemeine Gesetz für die Entwicklung von B, C, D, E, ... läfst sich aus (12. 11. 6. und 2.) erkennen und auf folgende Art darstellen. Die Symbole G_1, G_2, G_3, ..., deuten auf Gruppen von den Dimensionen k, $2k$, $3k$, $4k$, ...; S_1, S_2, S_3, S_4, ... deuten auf Gruppen von den Dimensionen $k+1$, $2k+1$, $3k+1$, $4k+1$, ... Jene deuten ferner auf die Zahlen $m-k+1$, $m-2k+1$, $m-3k+1$, ..., diese auf $m-k$, $m-2k$, $m-3k$, ... Betrachten wir nun die Gebilde von E, so zeigt sich, dafs in ihnen die Stellenzahlen von G_1, G_2, G_3, G_4; S_1, S_2, S_3, S_4 immer die Summe 4 geben; und zwar in der ersten Horizontalreihe zur vierten, in der zweiten zur dritten, in der dritten zur zweiten, in der letzten zur ersten Classe. Betrachten wir die Glieder von E in verticaler Richtung, so sehen wir in denen der ersten verticalen Reihe nur die Gröfsen G_1, G_2, G_3, G_4; in denen der zweiten Reihe eine von den Gröfsen S_1, S_2, S_3, S_4; in denen der dritten Reihe zwei; in denen der vierten Reihe drei; in denen der fünften Reihe vier. Dabei durchlaufen die Gröfsen S_1, S_2, S_3, S_4 alle möglichen Stellen, Zerstreuungen in Fächer bildend. Für jede einzelne Stellung, welche die Gröfsen S_1, S_2, S_3, S_4 unter den Gröfsen G_1, G_2, G_3, G_4 einnehmen, ergeben sich noch insbesondere die Versetzungen sämmtlicher Gröfsen, die sie nach den Stellenzahlen eingehen können. Das Gesetz des Zeichenwechsels in jeder horizontalen Reihe, so wie in den horizontalen Reihen unter sich, zeigt sich deutlich; eben so das der begleitenden Facultäten und Potenzen. Dies läfst sich leicht verallgemeinern. Bezeichnen wir, was nach dem Bildungsgesetze der Zerstreuungen in Fächer und der gleichzeitigen Versetzungen an den Gröfsen G_1, G_2, G_3, G_4; S_1, S_2, S_3, S_4 vorgenommen werden soll, in diesem besondern Falle durch D, so ergiebt sich folgende allgemeine Form für das $r$te Glied:

$$13. \quad R =$$

$$\Big[\frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}} D\,G_1^r n^r - \frac{(p-rk)^{r|1}}{1^{r|1}} D(G_1^{r-1} S_1) n^{r-1} + \dots$$

$$\dots (-1)^{r-1} \frac{(p-(k+1)r+2)^{r|1}}{1^{r|1}} D(G_1 S_1^{r-1}) n (-1)^r \frac{(p-(k+1)r+1)^{r|1}}{1^{r|1}} D\,S_1^r\Big] n^{p-(k+1)r}$$

$$-\Big[\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} D(G_1^{r-2} G_2) n^{r-1} - \frac{(p-rk)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} D(G_1^{r-2} S_2) n^{r-2} + \dots$$

$$\dots (-1)^{r-1} \frac{(p-(k+1)r+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} D(S_1^{r-2} S_2)\Big] n^{p-(k+1)r+1}$$

$$+\left[\frac{(p-rk+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}\begin{vmatrix}D(G_1^{r-3}G_3)\\D(G_1^{r-4}G_2G_2)\end{vmatrix}n^{r-2}-\frac{(p-rk)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}\begin{vmatrix}D(G_1^{r-3}S_3)\\D(G_1^{r-4}G_2S_2)\end{vmatrix}n^{r-3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots(-1)^{r-2}\frac{(p-(k+1)r+3)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}\begin{vmatrix}D(S_1^{r-3}S_3)\\D(S_1^{r-4}S_2S_2)\end{vmatrix}\right]n^{p-(k+1)r+2}$$

. . . .

$$(-1)^{r-2}\left[\frac{(p-rk+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}D(G_1G_{r-1})\\D(G_2G_{r-2})\\\cdots\cdots\\D(G_{\frac{1}{2}r}G_{\frac{1}{2}r})\end{vmatrix}n^2-\frac{(p-rk)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}D(G_1S_{r-1})\\D(G_2S_{r-2})\\\cdots\cdots\\D(G_{\frac{1}{2}r}S_{\frac{1}{2}r})\end{vmatrix}n+\frac{(p-rk-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}D(S_1S_{r-1})\\D(S_2S_{r-2})\\\cdots\cdots\\D(S_{\frac{1}{2}r}S_{\frac{1}{2}r})\end{vmatrix}\right]n^{p-rk-2}$$

$$(-1)^{r-1}\left[\frac{(p-rk+1)^{1|1}}{1^{1|1}}DG_r\,n-\frac{(p-rk)^{1|1}}{1^{1|1}}DS_r\right]n^{p-rk-1}.$$

Die Schlufsglieder der zweitletzten Horizontalreihe gelten, wenn r eine gerade Zahl ist. Ist r eine ungerade Zahl, so haben sie folgende Form:

$$D(G_{\frac{1}{2}(r-1)}G_{\frac{1}{2}(r+1)}),\quad D(G_{\frac{1}{2}(r-1)}S_{\frac{1}{2}(r+1)}),\quad D(S_{\frac{1}{2}(r-1)}S_{\frac{1}{2}(r+1)}).$$

Hieraus ergiebt sich für die Gruppen-Anzahl, welche dem Ereignifs günstig ist:

$$14.\quad A=B-C+D-E+F-\ldots$$

Man sieht, dafs sich die Rechnung, wenn auch in grofsen Kreisen, doch nach bestimmten Gesetzen bewegt und beliebig fortgesetzt werden kann. Die entwickelte Darstellung für die dem Ereignifs günstige Gruppen-Anzahl ist:

$$15.\quad A=$$

$$(p-k+1)(m-k+1)n^{p-k}-(p-k)(m-k)n^{p-k-1}$$

$$-\left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)^2n^2-2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-k)n+\frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)^2\right]n^{p-2k-2}$$

$$+(p-2k+1)(m-2k+1)n^{p-2k}-(p-2k)(m-2k)n^{p-2k-1}$$

$$+\left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^3n^3-3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^2(m-k)n^2\right.$$

$$\left.+3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m-k)^2n-\frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k)^3\right]n^{p-3k-3}$$

$$-2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-2k+1)n^2-\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}(m-k+1)(m-2k)\\(m-k)(m-2k+1)\end{vmatrix}n\right.$$

$$\left.+\frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k)\right]n^{p-3k-2}$$

$$+[(p-3k+1)(m-3k+1)n-(p-3k)(m-3k)]n^{p-3k-2}$$

. . . .

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn A durch die Zahl aller möglichen Gruppen dividirt wird. Sie ist

$$16.\quad w =$$

$$\frac{(p-k+1)(m-k+1)}{n^k} - \frac{(p-k)(m-k)}{n^{k+1}}$$

$$-\left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-k+1)^2}{1\cdot 2\cdot n^{2k}} - \frac{(p-2k)^{2|1}(m-k+1)(m-k)}{n^{2k+1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-k)^2}{1\cdot 2\cdot n^{2k+2}}\right]$$

$$+\frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{n^{2k}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{n^{2k+1}}$$

$$+\left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^{3k}} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}(m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^{3k+1}} + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}(m-k+1)(m-k)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^{3k+2}}\right.$$

$$\left. - \frac{(p-3k-2)^{3|1}(m-k)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^{3k+3}}\right]$$

$$-\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}(m-k+1)(m-2k+1)}{n^{3k}} - \frac{(p-3k)^{2|1}}{n^{3k+1}}\left\{\begin{matrix}(m-k+1)(m-2k)\\ +(m-k)(m-2k+1)\end{matrix}\right\} + \frac{(p-3k-1)^{2|1}(m-k)(m-2k)}{n^{3k+2}}\right]$$

$$+\frac{(p-3k+1)(m-3k+1)}{n^{3k}} - \frac{(p-3k)(m-3k)}{n^{3k+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus den bis jetzt erhaltenen Resultaten lassen sich nun leicht weitere Folgerungen ziehen.

In einer Urne befinden sich m Kugeln, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus und legt jedesmal die gezogene Kugel in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k Kugeln (wenigstens) hintereinander erscheinen werden, welche die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen haben?

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich leicht, wenn man in (15.) m statt n setzt; denn es müssen hier alle Kugeln mitwirken, um der Aufgabe zu entsprechen. Wird daher in (16.) m statt n gesetzt, so findet sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$17.\quad w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)}{m^k} - \frac{(p-k)(m-k)}{m^{k+1}}$$

$$-\left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-k+1)^2}{1\cdot 2\cdot m^{2k}} - \frac{(p-2k)^{2|1}(m-k+1)(m-k)}{m^{2k+1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-k)^2}{1\cdot 2\cdot m^{2k+2}}\right]$$

$$+\frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{m^{2k}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{m^{2k+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Bedingungen sind dieselben wie zu Anfang dieses Paragraphs. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von den m gesonderten Kugeln k Kugeln, wenigstens r und höchstens s (also r, $r+1$, $r+2$, ... s) mal hintereinander in der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen erscheinen werden?

Behalten wir die im vorigen Paragraph gewählte Bezeichnung bei, so ergiebt sich für die Anzahl der dem Unternehmen günstigen Fälle:

$$18. \quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1},$$

wenn A_k^r die Zahl der Glieder vom $r$ten und A_k^{s+1} die Zahl der Glieder vom $(s+1)$ten an in dem Ausdruck (14.) oder (15.) ist. Bezeichnen wir die Reihe (14.) auf folgende Weise:

$$A = A_k^1 - A_k^2 + A_k^3 - A_k^4 \ldots,$$

so ist

$$A_k^r = A_k^r - A_k^{r+1} + A_k^{r+2} - A_k^{r+3} \ldots \pm A_k^s \mp A_k^{s+1} \pm A_k^{s+2} \mp \ldots,$$

$$A_k^{s+1} = A_k^{s+1} - A_k^{s+2} + A_k^{s+3} - A_k^{s+3} + \ldots,$$

und es ergeben sich daher für (18.) folgende zwei Formen:

$$19. \quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{r+1} + A_k^{r+2} - A_k^{r+3} + \ldots - A_k^s,$$

$$20. \quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{r+1} + A_k^{r+2} - A_k^{r+3} \ldots + A_k^s - 2[A_k^{s+1} - A_k^{s+2} + \ldots].$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich

$$21. \quad w = \frac{A_k^{r,s}}{n^p} = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{n^p}.$$

Sollen alle Kugeln, die in der Urne enthalten sind, mitwirken, so ist aus (17.) die fragliche Wahrscheinlichkeit:

$$22. \quad w = \frac{A_k^{r,s}}{m^p} = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{m^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs k Kugeln von der genannten Eigenschaft gerade einmal, nicht mehr und nicht weniger, erscheinen werden, ist aus (15.):

$$23. \quad w = \frac{A - 2B + 2C - 2E + \ldots}{n^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs sie höchstens $s$mal, also s, $s-1$, $s-2$, ... 3, 2, 1 mal, oder gar nicht erscheinen werden, ist

$$24. \quad w = 1 - \frac{A_k^{s+1} + A_k^{s+2} - A_k^{s+3} + \ldots}{n^p}.$$

Die in diesem Paragraph aufgestellten Gleichungen sind allgemeiner als die des vorigen Paragraphs. Es lassen sich aus ihnen die des vorigen Para-

graphs leicht ableiten. Sollen alle Kugeln in einer bestimmten Ordnung erscheinen, so geht k in m über und es ist aus (17.) die Wahrscheinlichkeit:

$$25. \quad w = \frac{(p-m+1)}{m^m} - \frac{(p-2m+1)^{2|1}}{1^{2|1} \cdot m^{2m}} + \frac{(p-3m+1)^{3|1}}{1^{3|1} \cdot m^{3m}} - \ldots$$

Diese Gleichung stimmt mit (3.) im vorigen Paragraph. Eben so ergiebt sich die Gleichung (2.) des vorigen Paragraphs aus (17.), wenn $m-k+1=1$, $m-k=0$, $m-2k+1=0$ u. s. w. gesetzt wird; wie es sein mufs. Die Gleichung (17.) geht dann über in

$$26. \quad w = \frac{(p-k+1)}{m^k} - \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1} \cdot m^{2k}} + \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1} \cdot m^{3k}} - \ldots$$

In einer Urne sind r Arten von Kugeln. Von jeder Art sind n Kugeln mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ bezeichnet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus, legt jedesmal die gezogene Kugel nach der Ziehung zurück und betrachtet m Kugeln jeder Art als gesondert von den übrigen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens k Kugeln von den m gesonderten Kugeln hintereinander erscheinen werden, die mit der Reihenfolge der Zahlen bezeichnet sind?

Diese Frage ist eine Erweiterung der bisherigen. Die Zahl der dem Erfolge günstigen Fälle ergiebt sich, wenn die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen aus r Elementenreihen, von denen jede n Elemente hat, zur $p$ten Classe gebildet werden, und wenn darin die Zahl derjenigen, in welchen wenigstens k Elemente in der gewöhnlichen Reihenfolge der Zahlen hintereinander erscheinen, bestimmt wird; wobei zu bemerken ist, dafs nur m Elemente jeder Reihe berücksichtigt werden sollen. Hebt man eine von den auflösenden Gruppen hervor, so zeigt sich leicht, dafs ein Element von einer bestimmten Stellenzahl $r$mal ersetzt werden kann, wenn r Elementenreihen, aus welchen die Gruppen gebildet werden sollen, in Betracht kommen. Daher wird jede Gruppe so vielmal mehr erscheinen, als die Potenz von r angiebt, welche mit der Classenzahl der Versetzungen übereinstimmt. Dies gilt von jeder andern Gruppe, welche bei den Versetzungen entstehen kann. Nehmen wir an, die Gruppen werden zur $s$ten Classe gebildet, so ist die Vervielfältigungszahl für jede Gruppe

$$r^s;$$

wie sich Dies des nähern aus m. Comb. Lehre §. 41. No. 145 zeigt. Erwägt man nun, dafs sämmtliche Gruppen in (14.) der $p$ten Classe angehören, so ergiebt sich die dem Unternehmen günstige Gruppen-Anzahl, wenn die eben

angeführte Gleichung mit r^p multiplicirt wird. Es ist demnach

$$27. \quad A = r^p [B - C + D - E + F - \ldots]$$
$$= (p-k+1)(m-k+1) r^k (rn)^{p-k} - (p-k)(m-k) r^{k+1} (rn)^{p-k-1}$$
$$- \Big[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} (m-k+1)^2 r^{2k} (rn)^2 - 2\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}} (m-k+1)(m-k) r^{2k+1} rn$$
$$+ \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} (m-k)^2 r^{2k+2}\Big] (rn)^{p-2k-2}$$
$$+ (p-2k+1)(m-2k+1) r^{2k} (rn)^{p-2k} - (p-2k)(m-2k) r^{2k+1} (rn)^{p-2k-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$28. \quad w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)}{n^k} - \frac{(p-k)(m-k)}{n^{k+1}}$$
$$- \Big[\frac{(p-k+1)^{2|1}(m-k+1)^2}{1\cdot 2\cdot n^{2k}} - 2\frac{(p-2k)^{2|1}(m-k+1)(m-k)}{1^{2|1}\cdot n^{2k+1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-k)^2}{1\cdot 2\cdot n^{2k+2}}\Big]$$
$$+ \frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{n^{2k}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{n^{2k+1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man sieht, dafs die Gleichungen (16. und 28.) übereinstimmen. Dasselbe gilt von den übrigen Gleichungen, welche nach Analogie von (17. bis 26.) aus der eben aufgestellten Aufgabe abgeleitet werden können.

§. 28.

In einer Urne befinden sich n Kugeln, mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ bezeichnet. Von diesen Kugeln werden m, deren Zeichen der Reihe der gewöhnlichen Zahlen folgen, besonders beachtet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus und legt die gezogene Kugel nicht in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von den m gesonderten Kugeln k Kugeln (wenigstens) hintereinander erscheinen werden, welche die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen haben?

Die Zahl der günstigen Fälle stimmt mit folgender Gruppen-Anzahl überein. Die Versetzungen ohne Wiederholungen werden aus n Elementen zur $p$ten Classe gebildet und davon m Elemente, deren Stellenzahlen der Reihe der gewöhnlichen Zahlen folgen, besonders herausgehoben. Wie grofs ist die Zahl der Gruppen, in welchen wenigstens k Elemente der Reihe der gewöhnlichen Zahlen folgen?

Die der Frage genügenden Gruppen sind

$$
1. \quad G_1 = \begin{array}{l}
a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_k \\
a_2\ a_3\ a_4\ \cdots\ a_{k+1} \\
a_3\ a_4\ a_5\ \cdots\ a_{k+2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m-k+1}\, a_{m-k+2}\ \cdots\ a_m
\end{array}
$$

Ihre Anzahl ist $m-k+1$. Die Frage kann auf ähnliche Weise beantwortet werden, wie die im vorigen Paragraph. Alle Gruppen, welche bei der Bildung der Versetzungen entstehen, werden nach einer Richtung hin untersucht und die auflösenden gezählt. Jede der Gruppen (1.) kann entweder gerade von der ersten, oder zweiten, oder dritten u. s. w. erscheinen und k Stellen einnehmen. Die Stellung der nachfolgenden Elemente ist gleichgültig; die der vorhergehenden nicht. Diese letzten müssen besonders von der $(k+1)$ten an berücksichtigt werden. Folgende Fälle sind zu untersuchen; wobei wir uns der Analogie wegen auf das im vorigen Paragraph Gesagte beziehen.

a. Eine der unter (1.) angegebenen Gruppen erscheint von der *ersten* Stelle an. Ihr kann jede beliebige Zusammenstellung der übrigen $n-k$ Elemente zur $(p-k)$ten Classe folgen. Die dadurch bedingte Gruppen-Anzahl ist

$$B_1 = (m-k+1)(n-k)^{p-k|-1}.$$

b. Eine der auflösenden Gruppen erscheint von der *zweiten* Stelle an. Ihr kann jedes Element von den übrigen, mit Ausnahme desjenigen vorgehen, welches die nächst niedrigere Stellenzahl des Anfangs-Elements hat. Nimmt man auch hier die vorhergehenden Elemente vollständig an und zieht die Gruppen, welche zuviel vorkommen, ab, so ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$
\begin{array}{l}
\quad P(a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots a_n)^1\, a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_k \\
+ P(a_1, a_{k+2}, a_{k+3}, \cdots a_n)^1\, a_2\, a_3\, a_4 \cdots a_{k+1} - a_1 | a_2\, a_3 \cdots a_{k+1} \\
+ P(a_1, a_2, a_{k+3}, \cdots a_n)^1\, a_3\, a_4\, a_5 \cdots a_{k+2} - a_2 | a_3\, a_4 \cdots a_{k+2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ P(a_1, a_2, \cdots a_{m-k-1}, a_m, \cdots a_n)^1\, a_{m-k}\ a_{m-k+1} \cdots a_{m-1} - a_{m-k-1} | a_{m-k} \cdots a_{m-1} \\
\quad P(a_1, a_2, \cdots a_{m-k}, a_{m+1}, \cdots a_n)^1\, a_{m-k+1}\, a_{m-k+2} \cdots a_m - a_{m-k} | a_{m-k+1} \cdots a_m.
\end{array}
$$

Jeder dieser Gruppen kann die Zusammenstellung der übrigen $n-k-1$ Elemente zur $(p-k-1)$ten Classe folgen. Daraus entsteht folgende Gruppen-Anzahl:

$$
\begin{aligned}
B_2 &= [(n-k)(m-k+1)-(m-k)](n-k-1)^{p-k-1|-1} \\
&= (m-k+1)(n-k)^{p-k|-1} - (m-k)(n-k-1)^{p-k-1|-1}.
\end{aligned}
$$

c. Eine der auflösenden Gruppen erscheint von der *dritten* Stelle an. Ihr können zwei von den übrigen Elementen vorhergehen; mit der in (*b*) angegebenen Beschränkung. Werden auch hier die vortretenden Elemente vollständig angenommen, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$P(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n)^2 a_1 a_2 a_3 \ldots a_k$$
$$P(a_1, a_{k+2}, \ldots a_n)^2 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{k+1} - P(a_{k+2}, \ldots a_n)^1 a_1 | a_2 a_3 \ldots a_{k+1}$$
$$P(a_1, a_2, a_{k+3}, \ldots a_n)^2 a_3 a_4 a_5 \ldots a_{k+2} - P(a_1, a_{k+3}, \ldots a_n)^1 a_2 | a_3 a_4 \ldots a_{k+2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-1}, a_m, \ldots a_n)^2 a_{m-k} a_{m-k+1} \ldots a_{m-1}$$
$$- P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-2}, a_m, \ldots a_n)^1 a_{m-k-1} | a_{m-k} \ldots a_{m-1}$$
$$P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k}, a_{m+1}, \ldots a_n)^2 a_{m-k+1} \ldots a_m$$
$$- P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-1}, a_{m+1}, \ldots a_n)^1 a_{m-k} | a_{m-k+1} \ldots a_m.$$

Die Gruppen-Anzahl, welche sich in Rücksicht auf die nachfolgenden Elemente ergiebt, ist

$$B_3 = [(n-k)^{2|-1}(m-k+1) - (n-k-1)(m-k)](n-k-2)^{p-k-2|-1}$$
$$= (m-k+1)(n-k)^{p-k|-1} - (m-k)(n-k-1)^{p-k-1|-1}.$$

Für jeden spätern Fall findet sich die bisher erhaltene Gruppen-Anzahl. Es ist daher

$$B_{p-k+1} = (m-k+1)(n-k)^{p-k|-1} - (m-k)(n-k-1)^{p-k-1|-1}.$$

Durch Summirung der Werthe von B_1, B_2, B_3, ... B_{p-k+1} erhält man

2. $B = (p-k+1)(m-k+1)(n-k)^{p-k|-1} - (p-k)(m-k)(n-k-1)^{p-k-1|-1}$.

Diese Schlüsse sind so lange richtig, bis das Anfangs-Element einer auflösenden Gruppe in die $(k+1)$te oder eine spätere Stelle gerückt ist. Ist dies geschehen, so können auf den vorhergehenden Stellen schon Gruppen von der angegebenen Eigenschaft erschienen sein, wodurch Ausscheidungen wie im vorigen Paragraph bedingt werden. Folgende Fälle können vorkommen.

d. Die nöthigen Ausscheidungen sind durch folgende Ausdrücke bedingt:

$$P(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n)^k a_1 a_2 a_3 \ldots a_k$$
$$P(a_1, a_{k+2}, \ldots a_n)^k a_2 a_3 a_4 \ldots a_{k+1}$$
$$P(a_1, a_2, a_{k+3}, \ldots a_n)^k a_3 a_4 a_5 \ldots a_{k+2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k}, a_{m+1}, \ldots a_n)^k a_{m-k+1} a_{m-k+2} \ldots a_m.$$

Die Gleichung (2.) dient, die nöthigen Ausscheidungen leichter zu bewerkstelligen. Die Zahl der auszuscheidenden Gruppen, welche der erste Aus-

druck bedingt, ergiebt sich, wenn man erwägt, dafs hier $m-k$ Elemente Gruppen mit k aufeinander folgenden Stellenzahlen bilden können. Man erhält ihre Zahl aus (2.), wenn k statt p und $m-k$ statt m gesetzt wird. Dabei ist die Zahl der nachfolgenden Gruppen nicht in Rechnung gebracht. Hieraus folgt

$$1\cdot(m-2k+1).$$

Die Zahl der auszuscheidenden Gruppen, welche der zweite Ausdruck giebt, findet sich, wenn k statt p und $m-k-1$ statt m gesetzt wird, da nur die Elemente $a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots a_m$ mitwirken können. Hieraus folgt

$$1\cdot(m-2k).$$

Die wegen des dritten Ausdrucks auszuscheidende Anzahl ergiebt sich, wenn $w-k-2$ statt m und k statt p gesetzt wird und ist

$$1\cdot(m-2k-1).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so ergiebt sich für die Anzahl der auszuscheidenden Gruppen folgende Reihe:

$$[1(m-2k+1)+1\cdot(m-2k)+1(m-2k-1)+\cdots+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot1]=\frac{(m-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}.$$

Ganz die nämliche Reihe, nur in umgekehrter Ordnung, erhält man für die Zahl der auszuscheidenden Gruppen, deren Elemente die Stellenzahlen von 1 bis $m-k$ haben, und es ist

$$[1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+\cdots 1(m-2k)+1(m-2k+1)]=\frac{(m-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}.$$

Die Vereinigung beider Reihen giebt in Rücksicht auf die Anzahlen der Gruppen welche an den spätern $p-2k$ Stellen nachfolgen:

$$C_1=(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k|-1}.$$

e. Nun entstehen zufolge ($b, c, \ldots$) auch Gruppen, welche die $(k+1)$te Dimension haben (S_1). Durch den Vortritt von $k-1$ auf einander folgender Elemente bilden sie Gruppen von der $(2k)$ten Dimension und erhalten dann folgende Form, weil dieser Ausdruck erst von dem $k$ten Ausdrucke an beginnt:

$$\begin{array}{l|l|l}
a_1\,a_2\,a_3\ldots a_{k-1} & a_k & a_{k+1}\,a_{k+2}\ldots a_{2k} \quad = G_2\\
a_2\,a_3\,a_4\ldots a_k & a_{k+1} & a_{k+2}\,a_{k+3}\ldots a_{2k+1}\\
a_3\,a_4\,a_5\ldots a_{k+1} & a_{k+2} & a_{k+3}\,a_{k+4}\ldots a_{2k+2}\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
a_{m-2k+1}\ldots a_{m-k+1} & a_{m-k} & a_{m-k+1}\ldots a_m.
\end{array}$$

Ihre Anzahl ist $m-2k+1$. Sie sind selbst wieder auszuscheiden. In Rück-

sicht auf die nachfolgenden Gruppen, an den $p-2k$ spätern Stellen, wird hieraus

$$D_1 = (m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1}.$$

f. Die unter (1.) angegebenen Gruppen rücken auf die $(k+2)$te Stelle. Dies giebt folgenden Ausdruck

$$P(a_{k+1}, a_{k+2}, \dots a_n)^{k+1} a_1 a_2 a_3 \dots a_k$$
$$P(a_1, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots a_n)^{k+1} a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1} - P(a_{k+2}, a_{k+3}, \dots a_n)^k a_1 | a_2 a_3 \dots a_{k+1}$$
$$P(a_1, a_2, a_{k+3}, \dots a_n)^{k+1} a_3 a_4 a_5 \dots a_{k+2} - P(a_1, a_{k+3}, a_{k+4}, \dots a_n)^k a_2 | a_3 a_4 \dots a_{k+2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P(a_1, a_2, \dots a_{m-k}, a_{m+1}, \dots a_n)^{k+1} a_{m-k+1}, \dots a_m$$
$$- P(a_1, a_2, \dots a_{m-k-1}, a_{m+1}, a_n) a_{m-k} | a_{m-k+1} \dots a_m.$$

Die Anzahlen der Gruppen, welche wegen der Ausdrücke in der ersten verticalen Reihe ausgeschieden werden müssen, ergeben sich aus (2.), wenn $k+1$ statt k und der Reihe nach $m-k$, $m-k-1$, $m-k-2$, ... statt m gesetzt wird. Sie sind in folgender Doppelreihe begriffen:

$$[2(m-2k+1)+2(m-2k) \; + \dots \; 2\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 1](n-2k)$$
$$= 2\frac{(m-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(n-2k),$$
$$-[1(m-2k) \quad +1(m-2k-1) \quad \dots +1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1](n-2k)^0$$
$$= -1\frac{(m-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}.$$

Diese Doppelreihe entsteht wegen der Elemente, welche die Stellenzahlen von $k+1$ bis m haben. Ganz dieselbe Doppelreihe, nur in umgekehrter Ordnung, entsteht durch Behandlung der Ausdrücke, deren Elemente die Stellenzahlen von 1 bis $m-k$ haben. Hieraus ergiebt sich, in Rücksicht auf die ergänzende Gruppen-Anzahl, durch Summirung beider Reihen:

$$C_2 = 2(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k|-1} - 1(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Die Anzahl der Gruppen, welche wegen der Ausdrücke in der zweiten Scheitelreihe auszuscheiden sind, ergiebt sich, wenn p statt k und der Reihe nach $m-k-1$, $m-k-2$, ... statt m gesetzt wird. Auch hier entsteht eine Doppelreihe, wie in (d), die jedoch um ein Glied kürzer ist. Mit Rücksicht auf die Gruppen an den ergänzenden Stellen erhält man

$$E_1 - (m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Endlich müssen noch diejenigen Gruppen ausgeschieden werden, welche durch Zerlegung des vorstehenden Factors in die $(k-1)$te Classe Gruppen bringen,

die der Form G_2 und S_2 zugehören. Ihre Anzahl findet sich dem Frühern zufolge leicht und ist

$$D_2 = (m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1} - (m-2k)(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

g. Rücken die auflösenden Gruppen in die $(k+3)$te Stelle, so ergiebt sich Folgendes:

$$P(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n)^{k+2} a_1 a_2 \ldots a_k$$
$$P(a_1, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+2} a_2 a_3 \ldots a_{k+1} - P(a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+1} a_1 | a_2 a_3 \ldots a_{k+1}$$
$$P(a_1, a_2, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+2} a_3 a_4 \ldots a_{k+2} - P(a_1, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+1} a_2 | a_3 a_4 \ldots a_{k+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k}, a_{m+1}, a_n)^{k+2} a_{m-k+1} \ldots a_m$$
$$- P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-1} \ldots a_n)^{k+1} a_{m-k} | a_{m-k+1} \ldots a_m.$$

Die Gruppen, welche wegen der Ausdrücke in der ersten verticalen Reihe ausgeschieden werden müssen, ergeben sich aus (2.), wenn $p = k+2$ gesetzt und dann wie früher verfahren wird. Es entstehen zwei Doppelreihen, deren Verbindung zu folgendem Ausdruck führt:

$$C_3 = 3(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k|-1} - 2(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Durch gleiche Behandlung führen die Glieder der zweiten Scheitelreihe zu folgendem Ausdrucke:

$$E_2 = -2(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1} + 1(m-2k-1)^{2|1}(n-2k-2)^{p-2k-2|-1}.$$

Aufserdem müssen noch die Glieder der zweiten Reihe weiter behandelt werden, welche auf Gruppen von der Form G_2 und S_2 führen. Es entsteht daraus folgender Ausdruck:

$$D_3 = (m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1} - (m-2k)(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Die spätern Fälle erfordern die gleiche Behandlung. Die Schlufsglieder dieser Reihen sind

$$C_{p-2k+1} =$$
$$\frac{(p-2k+1)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k} - \frac{(p-2k)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1},$$

$$-E_{p-2k} =$$
$$-\frac{(p-2k)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1} + \frac{(p-2k-1)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-2k-1)^{2|1}(n-2k-2)^{p-2k-2|-1},$$

$$-D_{p-2k+1} =$$
$$-(m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1} + (m-2k)(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Durch Summirung der Werthe von C_1, C_2, ... C_{p-2k+1}; E_1, E_2, ... E_{p-2k}; D_1, D_2, ... D_{p-2k+1} erhält man folgende Zahl aus (2.) auszuscheidender Gruppen:

$$3.\quad C =$$

$$\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k|-1} - 2\,\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}$$
$$+\frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k-1)^{2|1}(n-2k-2)^{p-2k-2|-1}$$
$$-\,[(p-2k+1)(m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1} - (p-2k)(m-2k)(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}].$$

Es läfst sich nun aus (3.) ein Schema entwerfen, nach welchem die Untersuchung weiter fortzuführen ist. Es entsteht das nämliche Schema, wie im vorigen Paragraph No. 6., jedoch mit dem Unterschiede, dafs die Symbole G_1, G_2; S_1, S_2 die gleichen Elemente in sich aufnehmen und dafs hier Facultäten statt der Potenzen vorkommen. Leitet man hieraus ein Schema für die von (3.) auszuscheidende Gruppen-Anzahl ab, so entsteht ein Schema, welches mit dem in (11.) des vorigen Paragraph harmonirt. Dies giebt folgenden Ausdruck:

$$4.\quad D =$$

$$\Big[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{3|1}(n-3k)^{3|-1} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k)^{3|1}(n-3k-1)^{2|-1}$$
$$+3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k-1)^{3|1}(n-3k-2) - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k-2)^{3|1}\Big](n-3k-3)^{p-3k-3|-1}$$
$$-2\Big[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k+1)^{2|1}(n-3k)^{p-3k|-1} - 2\cdot\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k)^{2|1}(n-3k-1)^{p-3k-1|-1}$$
$$+\frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k-1)^{2|1}(n-3k-2)^{p-3k-2|-1}\Big]$$
$$+(p-3k+1)(m-3k+1)(n-3k)^{p-3k|-1} - (p-3k)(m-3k)(n-3k-1)^{p-3k-1|-1}.$$

Mit Hülfe des Schema (12.) im vorigen Paragraph ergiebt sich leicht das Fortgangsgesetz. Die Form des $r$ten Gliedes ist:

$$5.\quad R = \Big[\frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-rk+1)^{r|1}(n-rk)^{r|-1} - \frac{r^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-rk)^{r|1}(n-rk-1)^{r-1|-1} + \cdots$$
$$\cdots(-1)^r\frac{(p-(k+1)r+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-(k+1)r+1)^{r|1}\Big](n-(k+1)r)^{p-(k+1)r|-1}$$
$$-\frac{r-1}{1}\Big[\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk+1)^{r-1|1}(n-rk)^{r-1|-1} - \frac{(r-1)^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk)^{r-1|1}(n-rk-1)^{r-2|-1} + \cdots$$
$$\cdots(-)^{r-1}\frac{(p-(k+1)r+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k+1)r+2)^{r-1|1}\Big](n-(k+1)r+1)^{p-(k+1)r+1|-1}$$
$$+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-rk+1)^{r-2|1}(n-rk)^{r-2|-1} - \frac{(r-2)^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-rk)^{r-2|1}(n-rk-1)^{r-3|-1} + \cdots$$
$$\cdots(-1)^{r-2}\frac{(p-(k+1)r+3)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-(k+1)r+3)^{r-2|1}\Big](n-(k+1)r+2)^{p-(k+1)r+2|-1}$$

. . . .

$$(-1)^{r-2}\frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk+1)^{2|1}(n-rk)^{2|-1} - 2\cdot\frac{(p-rk)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk)^{2|1}(n-rk-1)$$
$$+\frac{(p-rk-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk-1)^{2|1}\Big](n-rk-2)^{p-rk-2|-1}$$
$$(-1)^{r-1}\frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{1|1}}{1}(m-kr+1)^{1|1}(n-rk) - \frac{(p-rk)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-rk)^{1|1}\Big](n-rk-1)^{p-rk-1|-1}.$$

Die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl ist demnach

$$6.\quad A = B - C + D - E + \cdots$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$7.\quad w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)}{n^{k|-1}} - \frac{(p-k)(m-k)}{n^{k+1|-1}}$$
$$-\Big[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-2k+1)^{2|1}}{1\cdot2\cdot n^{2k|-1}} - \frac{2(p-2k)^{2|1}(m-2k)^{2|1}}{1\cdot2\cdot n^{2k+1|-1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-2k-1)^{2|1}}{1\cdot2\cdot n^{2k+2|-1}}\Big]$$
$$+\frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{n^{2k|-1}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{n^{2k+1|-1}}$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{3|1}(m-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k|-1}} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}(m-3k)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+1|-1}} + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}(m-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+2|-1}}$$
$$-\frac{(p-3k-2)^{3|1}(m-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+3|-1}}$$

. . . .

Diese Ausdrücke verkürzen sich bedeutend, wenn $m = n$ ist, und dies führt zu folgender Frage.

In einer Urne sind m, mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln in die Urne zurückzulegen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs

wenigstens k Kugeln erscheinen werden, die mit der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen bezeichnet sind?

Setzt man in $B, C, D, E, \ldots$ m statt n, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$B = (p-k+1)(m-k+1)(m-k)^{p-k|-1} - (p-k)(m-k)(m-k-1)^{p-k-1|-1},$$

$$C = \left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1) + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\right](m-2k)^{p-2k|-1}$$
$$-\left[(p-2k+1)(m-2k+1)-(p-2k)\right](m-2k)^{p-2k|-1},$$

$$D = \left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{3|1} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{2|1} + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)\right.$$
$$\left. - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}\right](m-3k)^{p-3k|-1}$$
$$-2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1} - 2\cdot\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1) + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\right](m-3k)^{p-3k|-1}$$
$$+\left[(p-3k+1)(m-3k+1)-(p-3k)\right](m-3k)^{p-3k|-1}$$

u. s. w. Zählt man nun in $C, D, E, \ldots$ die schiefliegenden Glieder, welche den gleichen Facultäten von $m-3k+1$ zugehören, zusammen, so erhält man sehr kurze Ausdrücke. Die Formeln C und D gehen in folgende

$$8. \quad C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+2)^{p-2k+2|-1} - 2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2}(m-2k+1)^{p-2k+1|-1}$$
$$+\frac{(p-2k)(p-2k+1)}{1\cdot 2}(m-2k)^{p-2k|-1},$$

$$9. \quad D = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+3)^{p-3k+3|-1} - 3\cdot\frac{(p-3k+2)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k+3)^{p-3k+2|-1}$$
$$+3\cdot\frac{(p-3k+1)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k+1)^{p-3k+1|-1}$$
$$-\frac{(p-3k)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k)^{p-3k|-1}$$

u. s. f. über. Das allgemeine Gesetz dieser Bildungsart ist aus folgender Darstellung ersichtlich:

$$10. \quad R = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-(k-1)r)^{p-(k-1)r|-1} - \frac{r}{1}\cdot\frac{(p-(k-1)r-2)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k-1)r-1)^{p-(k-1)r-1|-1}$$
$$+\frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(p-(k-1)r-3)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k-1)r-2)^{p-(k-1)r-2|-1}$$
$$-\frac{r^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{(p-(k-1)r-4)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k-1)r-3)^{p-(k-1)r-3|-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^{r-1}\frac{r^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{p-rk+1}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk+1)^{p-rk+1|-1}$$
$$(-1)^{r}\frac{r^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{(p-rk)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk)^{p-rk|-1}.$$

Die Zahl der dem Erfolge günstigen Fälle ist für die vorliegende Aufgabe

$$11.\quad A=(p-k+1)(m-k+1)^{p-k+1|-1}-(p-k)(m-k)^{p-k|-1}$$
$$-\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{2^{2|1}}(m-2k+2)^{p-2k+2|-1}+2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2}(m-2k+1)^{p-2k+1|-1}$$
$$-\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k)^{p-2k|-1}$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+3)^{p-3k+3|-1}-3\cdot\frac{(p-3k+2)(p-3k+1)^{2|1}}{1^{3|1}}(m-3k+2)^{p-3k+2|-1}+\ldots.$$

. . . .

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$12.\quad w=\frac{p-k+1}{m^{k-1|-1}}-\frac{p-k}{m^{k|-1}}$$
$$-\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}\cdot m^{2k-2|-1}}+2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2\cdot m^{2k-1|-1}}-\frac{(p-2k)^{2|1}}{1\cdot 2\cdot m^{2k|-1}}$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k-3|-1}}-3\cdot\frac{(p-3k+2)(p-3k+1)^{2|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k-2|-1}}+3\cdot\frac{(p-3k+1)(p-3k+1)^{2|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k-1|-1}}-\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k|-1}}$$

. . . .

Die Wahrscheinlichkeit, daſs alle Kugeln in einer bestimmten Ordnung erscheinen werden, ist aus (12.), wenn man $p=k=m$ setzt:

$$13.\quad w=\frac{1}{m^{m-1|-1}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs in p Ziehungen p Kugeln in der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen erscheinen werden, ist aus (12.), wenn p statt k gesetzt wird,

$$14.\quad w=\frac{1}{m^{p-1|-1}}.$$

Zieht man (7. und 12.) von der Einheit ab, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, daſs höchstens $k-1$ Kugeln hintereinander in der Reihenfolge der Zahlen erscheinen werden. Behalten wir die frühere Bezeichnungsart bei, so bedeutet

$$15.\quad A_k^{r,s}=A_k^r-A_k^{s+1}$$

die Anzahl der Gruppen, in welchen k Elemente hintereinander in der Reihenfolge der Zahlen wenigstens r und höchstens $s$mal, also r, $r+1$, $r+2$, ... $s$mal, erscheinen werden, wenn die Versetzungen ohne Wiederholungen zur $p$ten Classe unter den zu (6. und 11.) angegebenen Bedingungen gebildet werden.

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind:

$$16.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{r+1}}{n^{p|-1}},$$

$$17.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{r+1}}{m^{p|-1}}.$$

In einer Urne befinden sich r Arten von Kugeln. Von jeder Art sind n Kugeln mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnet. Man stellt sich die m ersten Kugeln von jeder Art gesondert vor, nimmt p Kugeln einzeln heraus, ohne jedesmal die gezogene Kugel in die Urne zurückzulegen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens k Kugeln hintereinander erscheinen werden, die mit der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen bezeichnet sind?

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen stimmt mit der Zahl der Gruppen überein, wenn aus den oben angegebenen Elementenreihen die Versetzungen ohne Wiederholungen zur $p$ten Classe gebildet und diejenigen ausgewählt werden, in welchen wenigstens k Elemente die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen durch ihre Stellenzahlen zeigen.

Nach dem Vorgange der Schlüsse im vorigen Paragraph zu (27.) läfst sich die dem Unternehmen günstige Gruppen-Anzahl leicht finden, wenn man bemerkt, dafs jedes Element in einer der auflösenden Gruppen $r$mal ersetzt werden kann. Die ergänzende Gruppen-Anzahl wird dann aus den gehörigen Elementen gebildet werden müssen. Geschieht dies, so erhält man folgende Ausdrücke für die Werthe von B, C, D, E, ...

$$18.\quad B = (p-k+1)(m-k+1)r^k(rn-k)^{p-k|-1} - (p-k)(m-k)r^{k+1}(rn-k-1)^{p-k-1|-1},$$

$$C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1}r^{2k}(rn-2k)^{p-2k|-1} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k)^{2|1}r^{2k+1}(rn-2k-1)^{p-2k-1|-1}$$
$$+ \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k-1)^{2|1}r^{2k+2}(rn-2k-2)^{p-2k-2|-1}$$
$$-(p-2k+1)(m-2k+1)r^{2k}(rn-2k)^{p-2k|-1} + (p-2k)(m-2k)^{1|1}(rn-2k-1)^{p-2k-1|-1},$$

$$D = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{3|1}r^{3k}(rn-3k)^{p-3k|-1} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k)^{3|1}r^{3k+1}(rn-3k-1)^{p+3k-1|-1} + \ldots$$
$$-2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k+1)^{2|1}r^{3k}(rn-3k)^{p-3k|-1} - 2\cdot\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k)^{2|1}r^{3k+1}(rn-3k-1)^{p-3k-1|-1} + \ldots\right]$$
$$+(p-3k+1)(m-3k+1)r^{3k}(rn-3k)^{p-3k|-1} - (p-3k)(m-3k)r^{3k|-1}(rn-3k-1)^{p-3k-1|-1}$$

u. s. w. Die gesuchte Gruppen-Anzahl ist

$$19.\quad A = B - C + D - E + F \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit ist

$$20.\quad w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)r^k}{(rn)^{k|-1}} - \frac{(p-k)(m-k)r^{k+1}}{(rn)^{k+1}}$$
$$-\left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-2k+1)^{2|1}r^{2k}}{1\cdot 2\cdot (rn)^{2k|-1}} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}(m-2k)^{2|1}r^{2k+1}}{1\cdot 2\cdot (rn)^{2k+1|-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-2k-1)^{2|1}r^{2k+2}}{1\cdot 2\cdot (rn)^{2k+2}}\right]$$
$$+\frac{(p-2k+1)(m-2k+1)r^{2k}}{(rn)^{2k|-1}} - \frac{(p-2k)(m-2k)r^{2k+1}}{(rn)^{2k+1|-1}}$$

. . . .

Die Wahrscheinlichkeit in dem speciellen Falle $n = m$ ergiebt sich leicht. Die übrigen Gleichungen, dafs k Kugeln von der angegebenen Beschaffenheit wenigstens r und höchstens $s$mal erscheinen werden, ergeben sich eben so leicht und es ist auch hier

$$21.\quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1},$$

$$22.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{(rn)^p}$$

u. s. w.

Das in diesem Paragraph behandelte Problem ist im 2ten Bande der „Annal. d. Gergonne P. 324" als aufzulösende Aufgabe unter folgender ganz speciellen Form aufgestellt: „Une loterie étant composée des n numéros 1, 2, 3, 4, ... n, dont il en sort t à chaque tirage: quelle probabilité y a-t-il, que, parmi les t numéros d'un tirage, il ne se trouvera pas deux nombres consécutifs de la suite naturelle." Im dritten Bande der genannten Annalen ist es von *Tédenat, Encontre* und *L'huilier* behandelt. In einer allgemeineren Form ist es in demselben Bande aufgestellt und dann in dieser von *Le Grand* und *Rochat* Pg. 213—222 und wiederholt von *L'huilier* Pg. 222—231 untersucht. Die dortigen Untersuchungen bleiben aber bei den speciellen Fällen und haben deswegen zu keinem allgemeinen Gesetze, wie es hier aufgestellt ist, geführt. Macht man das Problem allgemein, wie hier, so zeigt sich bald der Unterschied, welcher sich ergiebt, wenn die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt wird, und wenn nicht. Im ersten Fall ist die Zahl der Kugeln bei jeder Ziehung vollständig, im zweiten nicht, und es entstehen zwei zusammengehörige Probleme, von welchen das eine in diesem, das andere im vorhergehenden Paragraph gelöset wurde, das eine auf Versetzungen ohne Wie-

derholungen, das andere auf Versetzungen mit Wiederholungen sich beziehend. Dieser Unterschied ist, wie man sieht, in den oben angeführten Untersuchungen übergangen.

§. 29.

In einer Urne befinden sich n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln. m Kugeln, deren Zeichen die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen haben, werden besonders beachtet. Man zieht $p$mal, nimmt jedesmal eine Kugel heraus und legt sie nach der Ziehung in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von diesen m gesonderten Kugeln irgend eine Kugel $k$mal hintereinander erscheinen werde?

Die Berechnung der Zahl der günstigen Fälle hangt mit der Lösung folgenden Problems zusammen. Die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe werden gebildet: wie grofs ist die Anzahl der Gruppen, in welchen irgend ein Element aus m ausgewählten Elementen wenigstens $k$mal hintereinander erscheinen wird? Die Gruppen, welche der Aufgabe genügen, sind

$$
\begin{aligned}
1. \quad G_1 = \; & a_1\, a_1\, a_1 \ldots\ldots a_1 = (a_1)^k \\
& a_2\, a_2\, a_2 \ldots\ldots a_2 = (a_2)^k \\
& a_3\, a_3\, a_3 \ldots\ldots a_3 = (a_3)^k \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_m\, a_m\, a_m \ldots\ldots a_m = (a_m)^k,
\end{aligned}
$$

wenn man sich die m ersten Elemente gesondert vorstellt. Ihre Zahl ist m. Der Aufgabe wird genügt, wenn eine dieser Gruppen von der ersten, zweiten, dritten, etc., oder von der $(p-k+1)$ten Stelle an erscheint.

a. Erscheint eine der Gruppen von der *ersten* Stelle an, so können ihr alle möglichen Gruppen aus n Elementen zur $(p-k)$ten Classe folgen. Die hieraus sich ergebende Anzahl ist

$$A_1 = m \,.\, n^{p-k}.$$

b. Erscheint eine der Gruppen von der *zweiten* Stelle an, so wird es zur nothwendigen Bedingung, dafs das Element mit der nämlichen Stellenzahl nicht an der ersten Stelle erscheinen darf, weil dieser Fall schon unter *a* begriffen ist. Folgen kann jede mögliche Zusammenstellung. Nimmt man nun die vorausgehenden Elemente dennoch vollständig an, so sind die zuviel ein-

geführten Gruppen wieder abzuziehen. Dies giebt

$$\left.\begin{array}{c} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right| (a_1)^k + \left.\begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right| (a_2)^k + \left.\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right| (a_3)^k \dots \left.\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_{m+1} \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right| (a_m)^k$$

$$= P'(a_1, a_2, \dots a_n)^1 \left| \begin{array}{l} (a_1)^k - a_1 | (a_1)^k \\ (a_2)^k - a_2 | (a_2)^k \\ (a_3)^k - a_3 | (a_3)^k \\ \dots\dots\dots\dots \\ (a_m)^k - a_m | (a_m)^k \end{array} \right. = mG_1 - S_1.$$

Hier bezeichnet, wie früher, G_1 Gruppen von der $k$ten und S_1 Gruppen von der $(k+1)$ten Dimension. Beide Zeichen, G_1 und S_1, deuten auf m Gruppen. Die aufzuführende Gruppen-Anzahl ist in Rücksicht auf die $p-k-1$ nachfolgenden Stellen:

$$A_2 = (n.m - m)\, n^{p-k-1} = m n^{p-k} - m n^{p-k-1}.$$

c. Erscheint eine der auflösenden Gruppen von der *dritten* Stelle an, so darf kein Element mit der nämlichen Bezeichnung an der vorhergehenden Stelle erscheinen. Nimmt man auch hier die vorstehenden Elemente vollständig an, so ergiebt sich

$$P'(a_1, a_2, \dots a_n)^1 [P'(a_1, a_2, \dots a_n) G_1 - S_1].$$

Hieraus erhält man, in Beziehung auf die ergänzenden Gruppen:

$$A_3 = n[n.m - m]\, n^{p-k-2} = m.n^{p-k} - m.n^{p-k-1}.$$

Setzt man diese Schlüsse weiter fort, so findet sich für das Schlußglied:

$$A_{p-k+1} = m \cdot n^{p-k} - m.n^{p-k-1}.$$

Durch Summirung der Werthe A_1, A_2, A_3, ..., A_{p-k+1} ergiebt sich folgende Zahl auszuscheidender Gruppen:

$$2. \quad B = (p-k+1)\, m.n^{p-k} - (p-k)\, m.n^{p-k-1}.$$

Diese Schlüsse sind so lange richtig, bis die auflösenden Gruppen auf die $(k+1)$te Stelle gerückt sind. Ist dies geschehen, so tritt, nach Analogie des in den beiden vorhergehenden Paragraphen Gesagten, folgendes Schema ein:

$$\begin{aligned}3.\quad &[P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^k G_1 - P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k-1} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-2k} \\ &+ [P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k+1} G_1 - P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^k S_1] P'(a_1, a_n)^{p-2k-1} \\ &+ [P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k+2} G_1 - P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^k S_1] P'(a_1, a_n)^{p-2k-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [P'(a_1, a_1, \ldots a_n)^{p-k} G_1 - P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^k S_1] P'(a_1, a_n)^0.\end{aligned}$$

Die Anzahl der wegen der ersten Verticalreihe auszuscheidenden Gruppen ergiebt sich aus (2.), wenn der Reihe nach k, $k+1$, $k+2$, ... $p-k$ statt p gesetzt, m statt G_1 eingeführt wird und die ergänzenden Gruppen gezählt werden. Es findet sich

$$\begin{aligned}C_1 = \; & m \cdot m \cdot n^{p-2k} \qquad = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 n^{p-2k} - \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 n^{p-2k-1} \\ &+ n\,[2mn - 1 \cdot m]\, m n^{p-2k-1} \\ &+ n^1 [3mn - 2m]\, m n^{p-2k-2} \\ &+ n^2 [4mn - 3m]\, m n^{p-2k-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ n^{p-2k-1} [(p-2k+1)mn - (p-2k)m]\, m.\end{aligned}$$

d. Ganz auf dieselbe Weise werden die Ausdrücke der zweiten Scheitelreihe vom zweiten Gliede an behandelt. Es ist der Reihe nach k, $k+1$, $k+2$, ... $(p-k-1)$ statt p in (2.) und m statt S_1 zu setzen. Die entstehenden Reihen sind um je ein Glied kürzer als die eben gefundenen, stimmen aber im Übrigen mit ihnen überein. Es findet sich also

$$-C_2 = -\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}} m^2 n^{p-2k-1} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} m^2 n^{p-2k-2}.$$

e. Die Glieder der zweiten Scheitelreihe müssen nun noch einer zweiten Behandlung unterworfen werden, welche sich aus folgender Darstellung ergiebt:

$$\begin{aligned}&P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k-1} S_1 + P'(a_1, a_1, \ldots a_n)^1 \cdot P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k-1} S_1 \\ &\qquad + P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^2 \cdot P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k-1} S_1 + \ldots \\ &\qquad \ldots + P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{p-2k} \cdot P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k-1} S_1.\end{aligned}$$

Die Verbindung der Ausdrücke $P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k-1} S_1$ führt zu Gruppen von der $2k$ten und $(2k+1)$ten Dimension, die sich als Ganzes characterisiren. Der erste Ausdruck giebt

$$\begin{aligned}(a_1)^{k-1} a_1 \,|\, (a_1)^k &= (a_1)^{2k}, \\ (a_2)^{k-1} a_2 \,|\, (a_2)^k &= (a_2)^{2k}, \\ (a_3)^{k-1} a_3 \,|\, (a\,)^k &= (a_3)^{2k}, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ (a_m)^{k-1} a_m \,|\, (a_m)^k &= (a_m)^{2k}.\end{aligned}$$

Die Anzahl dieser Gruppen ist m. In Rücksicht auf die begleitenden Gruppen ergiebt sich folgende Anzahl:

$$D_1 = m \cdot n^{p-2k}.$$

f. Der Ausdruck $P'(a_1, a_2, \ldots. a_n)^1 \cdot P'(a_1, a_2, \ldots. a_n)^{k-1} S_1$ giebt nach dem eben Gesagten und nach Analogie der frühern Bemerkungen, wenn die vortretende Elementen-Anzahl vollständig angenommen wird, Folgendes:

$$\begin{aligned} P'(a_1, a_2, \ldots. a_n)^1 G_2 - a_1 \,|\, (a_1)^{2k} &= n G_2 - S_2. \\ - a_2 \,|\, (a_2)^{2k} & \\ - a_3 \,|\, (a_3)^{2k} & \\ \ldots\ldots\ldots & \\ - a_m \,|\, (a_m)^{2k} & \end{aligned}$$

Dies führt zu folgender Gruppen-Anzahl:

$$D_2 = [n \cdot m - m]\, n^{p-2k-1}.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich für die Gruppen-Anzahl des letzten Gliedes:

$$D_{p-2k+1} = m n^{p-2k} - m n^{p-2k-1}.$$

Durch Vereinigung von D_1, D_2, D_3, ... D_{p-2k+1} ergiebt sich

$$-C_3 = -[(p-2k+1) m \cdot n^{p-2k} - (p-2k) m \cdot n^{p-2k-1}].$$

Wird $C_1 - C_2 - C_3$ zusammengezählt, so ist die von (2.) auszuscheidende Zahl von Gruppen:

$$4.\quad C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-2k} - 2 \cdot \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-2k-1} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-2k-2}$$
$$- [(p-2k+1) m \cdot n^{p-2k} - (p-2k) m \cdot n^{p-2k-1}].$$

Gehen wir auf demselben Wege weiter, so zeigt sich leicht die Übereinstimmung der hiesigen Entwicklungsart mit denen in den beiden vorhergehenden Fällen. Es gelten deshalb auch die nämlichen Schemata, wie früher, deren Anwendung sich aber dadurch vereinfacht, dafs alle die Symbole G_1, G_2, G_3, ... und S_1, S_2, S_3, ... ohne Unterschied auf m deuten. Demnach ist die Zahl der von C auszuscheidenden Gruppen:

$$5.\quad D = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot m^3 \cdot n^{p-3k} - 3 \cdot \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot m^3 \cdot n^{p-3k-1}$$
$$+ 3 \cdot \frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot m^3 \cdot n^{p-3k-2} - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot m \cdot n^{p-3k-3}$$
$$- 2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-3k} - 2 \cdot \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-3k-1} + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-3k-2}\right]$$
$$+ (p-3k+1) m n^{p-3k} - (p-3k) m n^{p-3k-1}.$$

Das Fortgangsgesetz, welches diesen Gebilden zu Grunde liegt, läſst sich deutlich erkennen. Es fällt mit dem in (4. und 5.) im vorigen Paragraph zusammen, wenn gehörigen Orts Potenzen statt Facultäten geschrieben werden. Es ist allgemein

$$6.\quad R = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot m^r \cdot n^{p-rk} - \frac{r}{1} \cdot \frac{(p-rk)^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot m^r \cdot n^{p-3k-1}$$

$$+ \frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(p-rk-1)^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot m^r \cdot n^{p-rk-2} - \ldots\ldots (-1)^r \cdot \frac{(p-rk-r+1)^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot m^r \cdot n^{p-(k+1)r}$$

$$- \frac{r-1}{1} \left[\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} \cdot m^{r-1} \cdot n^{p-rk} - \frac{r-1}{1} \cdot \frac{(p-rk)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} \cdot m^{r-1} \cdot n^{p-rk-1} \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots (-1)^{r-1} \cdot \frac{(p-(k+1)r+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} \cdot m^{r-1} \cdot n^{p-(k+1)r+1} \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{r-1} \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} [(p-rk+1)m \cdot n^{p-rk} - (p-rk)m \cdot n^{p-rk-1}].$$

Die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl ist

$$7.\quad A = B - C + D - E + \ldots\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit ist

$$8.\quad w = \frac{(p-k+1)m}{n^k} - \frac{(p-k)m}{n^{k+1}}$$

$$- \left[\frac{(p-2k+1)^{2|1} m^2}{1^{2|1} n^{2k}} - 2 \cdot \frac{(p-2k)^{2|1} m^2}{1^{2|1} n^{2k+1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1} m^2}{1^{2|1} n^{2k+2}} \right]$$

$$+ \frac{(p-2k+1)m}{n^{2k}} - \frac{(p-2k)m}{n^{2k+1}}$$

$$+ \frac{(p-3k+1)^{3|1} m^3}{1^{3|1} n^{3k}} - 3 \cdot \frac{(p-3k)^{3|1} m^3}{1^{3|1} m^{3k+1}} + 3 \cdot \frac{(p-3k-1)^{3|1} m^3}{1^{3|1} m^{3k+2}} - \frac{(p-3k-2)^{3|1} m^3}{1^{3|1} m^{3k+3}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In einer Urne befinden sich m, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnete Kugeln. Man zieht $p$mal, nimmt jedesmal eine Kugel heraus und legt sie in die Urne nach der Ziehung zurück. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs irgend eine Kugel $k$mal hintereinander erscheinen werde?

Die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl ergiebt sich, wenn man in den Werthen von B, C, D, E, ... m statt n setzt. Geschieht dies, so ergeben sich für B, C, D, E, ... sehr kurze Ausdrücke, wenn die schiefliegenden Glieder auf dieselbe Weise wie in (8. 9. und 10.) summirt werden. Es findet sich

$$9.\quad C=\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^{p-2k+2}-2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2}\cdot m^{p-2k+1}$$
$$-\frac{(p-2k)(p-2k+1)}{1\cdot 2}\cdot m^{p-2k}$$

$$10.\quad D=\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m^{p-3k+3}-3\cdot\frac{p-3k+2}{3}\cdot\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^{p-3k+2}$$
$$+3\cdot\frac{p-3k+1}{3}\cdot\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^{p-3k+1}-\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m^{p-3k}$$

u. s. w. Allgemein

$$11.\quad R=\frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}}\cdot m^{p-(k-1)r}-\frac{r}{1}\cdot\frac{p-(k-1)r-2}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}\cdot m^{p-(k-1)r-1}$$
$$+\frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{p-(k-1)r-3}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}\cdot m^{p-(k-1)r-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^r\frac{r^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{p-rk}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}\cdot m^{p-rk}.$$

Dieser Ausdruck läfst sich noch weiter abkürzen, wenn die Facultäten in (9. 10. und 11.) anders geordnet werden; wie es sich an der Gleichung (10.) zeigen wird. Es ist, wenn man die Potenz m^{p-3k} aus sämmtlichen Gliedern scheidet,

$$\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m^3=\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m^3+\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^3,$$
$$-3\cdot\frac{p-3k+2}{3}\cdot\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^2=-\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot 3m^2-\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot 2m^2,$$
$$+3\cdot\frac{p-3k+1}{3}\cdot\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m=+(p-3k)^{3|1}\cdot 3m+\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m,$$
$$-\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}=-\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}.$$

Werden die zwei verticalen Reihen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vereinigt, so ist

$$\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}[m^3-3m^2+3m-1]=\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-1)^3,$$
$$\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}[m^2-2m+1]m=\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-1)^2m.$$

Demnach ist

$$12.\quad D=\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m(m-1)^2+\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-1)^3\right]m^{p-3k}.$$

Auf gleiche Weise lassen sich die übrigen Glieder E, F, ... behandeln, und die Zahl der günstigen Gruppen ist

$$13.\quad A = [(p-k+1)^{0|1}\cdot m + (p-k)(m-1)]\,m^{p-k}$$
$$-\left[(p-2k+1)^{1|1}\cdot m(m-1) + \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot(m-1)^2\right]m^{p-2k}$$
$$+\left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m(m-1)^2 + \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot(m-1)^3\right]m^{p-3k}$$
$$-\left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m(m-1)^3 + \frac{(p-3k)^{4|1}}{1^{4|1}}\cdot(m-1)^4\right]m^{p-4k}$$

. . . .

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$14.\quad w = \frac{m+(p-k)(m-1)}{m^k} - \frac{(p-2k+1)m(m-1)}{m^{2k}} - \frac{(p-2k)^{2|1}(m-1)^2}{1\cdot2\cdot m^{2k}}$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{2|1}m(m-1)^2}{1\cdot2\cdot m^{3k}} + \frac{(p-3k)^{3|1}(m-1)^3}{1\cdot2\cdot3\cdot m^{3k}}$$
$$-\frac{(p-4k+1)^{3|1}m(m-1)^3}{1\cdot2\cdot3\cdot m^{4k}} - \frac{(p-4k)^{4|1}(m-1)^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot m^{4k}}$$

. . . .

oder auch

$$15.\quad w = \frac{(p-k+1)^{0|1}(m-1)}{m^k}\left[p-k+\frac{1\cdot m}{m-1}\right] - \frac{(p-2k+1)^{1|1}(m-1)^2}{1\cdot2\cdot m^{2k}}\left[p-2k+\frac{2m}{m-1}\right]$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{2|1}(m-1)^3}{1\cdot2\cdot3\cdot m^{3k}}\left[p-3k+\frac{3m}{m-1}\right]$$
$$-\frac{(p-4k+1)^{3|1}(m-1)^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot m^{4k}}\left[p-4k+\frac{4m}{m-1}\right]$$

. . . .

Behält man die gewählte Bezeichnung bei, so giebt

$$16.\quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1}$$

die Zahl der Gruppen, wenn eine Kugel wenigstens $k$mal hintereinander erscheinen, und dieses wiederholte Erscheinen wenigstens $r$mal und höchstens $s$mal eintreten soll.

Die Wahrscheinlichkeiten, dafs unter den obigen Bedingungen eine Kugel $k$mal hintereinander erscheinen, und dafs dieses Erscheinen wenigstens r und höchstens $s$mal eintreten werde, ist unter den oben angegebenen Bedingungen:

$$17.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{n^p},$$

$$18.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{m^p}.$$

Setzt man in (15.) $m=2$, so ergiebt sich

$$19.\quad w=\frac{p-k+2}{2^k}-\frac{(p-2k+1)(p-2k+2\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 2^{2k}}+\frac{(p-3k+1)(p-3k+2)(p-3k+3\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{3k}}-\ldots.$$

Diese Gleichung beantwortet folgendes Problem.

A trachtet gegen *B* ein Ereignifs *k*mal hintereinander herbeizuführen. Das Gleiche unternimmt *B* gegen *A*. Die Wahrscheinlichkeit, im einzelnen Falle zu siegen, ist für *A* und *B* gleich grofs. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in *p* Versuchen einer von beiden gesiegt haben werde?

Die Aufgabe läfst sich auch in folgender Form ausdrücken.

$(k+1)$ Personen spielen miteinander, unter der Bedingung, dafs Derjenige gewinnen soll, welcher der Reihe nach alle seine Gegner besiegt haben wird. Die Wahrscheinlichkeit für jeden Spieler, im einzelnen Falle zu siegen, sobald er zum Spiele gelangt, ist $\frac{1}{2}$. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel in *p* Versuchen geendet sein werde?

N. Bernoulli hat diese Aufgabe in der eben angegebenen Form in einem Briefe an *Montmort* aufgestellt (Analyse sur les jeux d'haz. II éd. Par. 1714. Pg. 382). *Laplace* hat es nach ihm (Théor. anal. d. prob. Nro. 11. Pg. 241) durch die „Fonct. génératr." gelöset, ohne die Arbeit des Erfinders anzuführen. Hier erscheint es als ein besonderer Fall einer sehr allgemeinen Aufgabe.

Häufig kommt dies Spiel unter drei Personen vor, und zwar so, dafs diejenige, welche im einzelnen Falle verliert, eine bestimmte Summe an den Gegner und in eine gemeinschaftliche Casse zahlen mufs. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel in *p* Versuchen geendet sein werde, ergiebt sich, wenn in (19.) $k=2$ gesetzt wird. Bei 2, 3, 4, 5, 6, ... Versuchen sind die Wahrscheinlichkeiten

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{15}{16},\ \tfrac{31}{32},\ \tfrac{63}{64},\ \tfrac{127}{128},\ \ldots.$$

Anm. Das hier befolgte Verfahren ist zu Entwicklungen sehr dienlich. Es hat sich dies schon in (§. 26.) gezeigt und wird sich immer zeigen, auch wenn nur specielle Fälle zu behandeln sind. Soll die Gleichung (19.) entwickelt und die zuletzt gegebene Darstellung der Aufgabe beibehalten werden, so wird man die Gleichung auf folgende Art finden.

Damit das Spiel geendet werde, mufs irgend ein Spieler *k*mal hintereinander gewinnen. Er kann aber nur gewinnen, wenn ihn die Reihe des Eintritts getroffen hat. Der erste und zweite Spieler kann also nur in den *r* ersten Versuchen gewinnen, der dritte nur von dem zweiten Versuche an, der vierte von dem dritten Versuche an, u. s. w., der $(k+1)$te von dem

$(p-k+1)$ten Versuche an. Demnach sind $[(p-k+1)+1]$ Fälle möglich, in welchen dies geschehen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Ereignifs in jedem einzelnen Falle eintreffen werde, ist $\frac{1}{2^k}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$20.\quad w_1 = \frac{p-k+1}{2^k} + \frac{1}{2^k}.$$

Diese Schlüsse sind richtig, bis das Spiel bis zu dem $(k+1)$ten Versuche vorgerückt ist; dann sind k Versuche vorausgegangen, worin das Ereignifs schon eingetreten sein kann. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit mufs bestimmt und von der eben gefundenen ausgeschieden werden. Sie findet sich, wenn die Zahl der günstigen Fälle nach der Formel

$$21.\quad A_1 = \frac{p-k+1}{1} + 1$$

bestimmt und mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit des einzelnen Falles verbunden wird. Wird daher in (21.) $p = k$ gesetzt, so ergiebt sich für die abzuziehende Gröfse:

$$w_2 = \left[\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}.$$

Ist das Spiel bis zum $(k+2)$ten Versuche vorgerückt, so ist in (21.) $p = k+1$ zu setzen und es ergiebt sich für die auszuscheidende Gröfse:

$$w_3 = \left[\frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}.$$

Ist das Spiel bis zum $(k+3)$ten Versuche vorgerückt, so ist in (21.) $p = k+2$ zu setzen und der auszuscheidende Ausdruck ist

$$w_4 = \left[\frac{3}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}$$

u. s. w. Endlich ist

$$w_{p-2k+2} = \left[\frac{p-2k+1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}.$$

Die Verbindung dieser Ausdrücke führt zu folgender Formel:

$$U_1 = \left[\frac{(p-2k+1)(p-2k+2)}{1\cdot 2\cdot 2^k} + \frac{(p-2k+1)}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}.$$

Die Schlüsse sind so lange gültig, bis das Spiel bis zum $(2k+1)$ten Versuche vorgeschritten ist. Dann treten ähnliche Fälle ein, wie die vorigen; welche dann wieder Ausscheidungen veranlassen. Diese Ausscheidungen ergeben sich, wenn in dem Zähler der eben gefundenen Formel

$$A_2 = \frac{(p-2k+1)(p-2k+2)}{1\cdot 2} + \frac{p-2k+1}{1}$$

der Reihe nach $p = 2k,\ 2k+1,\ 2k+2, \ldots\ p-k$ gesetzt wird und die Resultate mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verbunden werden. Daraus entsteht folgender Ausdruck:

$$U_2 = \frac{(p-3k+1)(p-3k+2)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{3k}} + \frac{(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 2^{3k}}.$$

Die Schlüsse lassen sich leicht fortsetzen und es ergiebt sich durch schickliche Verbindung die Reihe

$$22.\quad w = \frac{p-k+2}{2^k} - \frac{(p-2k+1)(p-2k+2\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 2^{2k}} + \frac{(p-3k+1)(p-3k+2)(p-3k+3\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{3k}} - \ldots,$$

die schon in (19.) aufgestellt wurde.

§. 30.

Ein besonderer Fall der Aufgabe im vorigen Paragraph soll hier näher betrachtet werden; und zwar unter folgender veränderter Form.

A trachtet, gegen *B* ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bezeichnet wird, $r$mal hintereinander in p Versuchen herbeizuführen. Die Wahrscheinlichkeit, welche das Eintreffen des für *B* günstigen Ereignisses bedingt, werde durch b bezeichnet. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für *A*, seinen Zweck zu erreichen?

A erreicht seinen Zweck, wenn das ihm günstige Ereignifs $r$mal hintereinander, entweder gerade vom 1ten, oder vom 2ten, oder vom 3ten u. s. w., oder endlich vom $(p-r+1)$ten Versuche an eintrifft.

a. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal hintereinander vom ersten Versuche an eintreffen werde, ist

$$w_1 = a^r.$$

b. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es vom zweiten Versuche an eintreffen werde, setzt voraus, dafs das für *A* günstige Ereignifs im ersten Versuche nicht eintreffen werde, weil dieser Fall schon unter *a* vorgesehen ist. Die hieraus sich ergebende Wahrscheinlichkeit ist

$$w_2 = b\,a^r.$$

c. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das für *A* günstige Ereignifs vom dritten Versuche an eintreffen werde, setzt voraus, dafs das entgegengesetzte Ereignifs gerade im zweiten Versuche eintreffen werde. Im ersten Versuche kann jedes von den beiden fraglichen Ereignissen eingetroffen sein. Die hiedurch bedingte Wahrscheinlichkeit ist

$$w_3 = (a+b)\,b\,a^r.$$

d. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das für A günstige Ereignifs vom vierten Versuche an eintreffen werde, setzt voraus, dafs das Entgegengesetzte gerade im dritten Versuche eintreffen werde. In den beiden ersten Versuchen kann jedes Ereignifs eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$w_4 = (a+b)^2 b a^r.$$

Werden diese Schlüsse weiter fortgesetzt, so ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, dafs das Ereignifs gerade vom $(p-r+1)$ten Versuche an eintreffen werde:

$$w_{p-r+1} = (a+b)^{p-r-1} b a^r.$$

Durch Vereinigung aller auf die vorstehende Weise gefundenen Ausdrücke ergiebt sich

$$1. \quad w_0 = a^r + b a^r [1 + a + b + (a+b)^2 + (a+b)^3 + \dots (a+b)^{p-r-1}]$$
$$= a^r + b a^r \frac{1-(a+b)^{p-r}}{1-(a+b)}.$$

Die Schlüsse sind so lange gültig, als die Potenzen des vorausgehenden Binomiums $a+b$ sich nicht bis zur $r$ten erheben. Erheben sie sich bis zu dieser Höhe, so enthalten die Glieder der Reihe Fälle, die für A günstig sind und welche ausgeschieden werden müssen. Die Glieder, welche hiebei in Betracht kommen, sind

$$(a+b)^r b a^r, \quad (a+b)^{r+1} b a^r, \quad (a+b)^{r+2} b a^r, \quad \dots \quad (a+b)^{p-r-1} b a^r.$$

Die Ausscheidung geht nach den Bemerkungen in (a, b, c) vor sich und es sind die Schlüsse, welche dort auf $p-r+1$ Fälle angewendet wurden, auf $r, r+1, r+2, \dots p-1$ Fälle anzuwenden. Dies giebt

$$u_1 = a^r b a^r,$$
$$u_2 = (a^r + b a^r) b a^r,$$
$$u_3 = (a^r + b a^r + (a+b) b a^r) b a^r,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{p-2r} = (a^r + b a^r + (a+b) b a^r + (a+b)^2 b a^r \dots (a+b)^{p-2r-2} b a^r) b a^r.$$

Dieser Ausdruck läfst sich leicht in folgenden umformen:

$$2. \quad u_0 = (p-2r) a^r b a^r + (b a^r)^2 [(p-2r-1) + (p-2r-2)(a+b)$$
$$+ (p-2r-3)(a+b)^2 + \dots (a+b)^{p-2r-2}].$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe läfst sich nach (No. 417. §. 84. S. 180) meiner „Aufsteigenden Functionen" summiren. Sie giebt folgenden Ausdruck:

$$3. \quad u_0 = (p-2r) a^r b a^r + (b a^r)^2 \left[\frac{(a+b)^{p-2r} - (a+b)}{(a+b-1)^2} - \frac{p-2r-1}{a+b-1}\right].$$

Der Ausdruck (2.) oder (3.) giebt so lange ein richtiges Resultat, als die

Potenzen von $a+b$ unter r stehen. Erheben sie sich auf r, oder darüber, so sind Ausscheidungen nöthig, die man auf ähnliche Weise wie bisher erhält. Benutzt man hiezu die obigen Gleichungen, so findet sich

$$\begin{aligned}
4.\quad t = \; & (p-3r-1)a^r(ba^r)^2, \\
& +(p-3r-2)a^r(ba^r)^2+(ba^r)^3(p-3r-2) \\
& +(p-3r-3)a^r(ba^r)^2+(ba^r)^3[(p-3r-3)+(p-3r-3)(a+b)] \\
& +(p-3r-4)a^r(ba^r)^2+(ba^r)^3[(p-3r-4)+(p-3r-4)(a+b) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(p-3r-4)(a+b)^2] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +a^r(ba^r)^2 \qquad +(ba^r)^3[1+(a+b)+(a+b)^2+(a+b)^3+\ldots.(a+b)^{p-3r-3}] \\
= & \frac{(p-3r-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2a^r+(ba^r)^3\Big[\frac{(p-3r-2)^{2|1}}{1^{2|1}}+\frac{(p-3r-3)^{2|1}}{1^{2|1}}(a+b) \\
& \qquad +\frac{(p-3r-4)^{2|1}}{1^{2|1}}(a+b)^2+\ldots.\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}(a+b)^{p-3r-3}\Big].
\end{aligned}$$

Wird hier die eingeklammerte Reihe nach der oben angegebenen Art summirt, so geht (4.) in folgende Formel über:

$$5.\quad t =$$

$$\frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2a^r+(ba^r)^3\left[\frac{(a+b)^{p-3r}-(a+b)^2}{(a+b-1)^3}-\frac{(p-3r-2)(a+b)}{(a+b-1)^2}-\frac{(p-3r-2)^{2|1}}{1^{2|1}(a+b-1)}\right].$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich folgender, von (5.) auszuscheidender Ausdruck:

$$6.\quad s =$$

$$\frac{(p-4r)^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot a^r(ba^r)^3-(ba^r)^4\left[\frac{(a+b)^{p-4r}-(a+b)^3}{(a+b-1)^4}-\frac{(p-4r-3)(a+b)^2}{(a+b-1)^3}-\frac{(p-4r-3)^{2|1}(a+b)}{1^{2|1}(a+b-1)^2}-\frac{(p-4r-3)^{3|1}}{1^{3|1}(a+b-1)}\right].$$

Das Fortgangsgesetz liegt klar vor Augen. Die Gröfsen a und b stehen in keiner nähern Beziehung zu einander, sondern sind gegenseitig unabhängig. Hieraus ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$7.\quad w =$$

$$\begin{aligned}
& a^r+ba^r\frac{(a+b)^{p-r}-1}{a+b-1} \\
& -(p-2r)a^r\cdot ba^r-(ba^r)^2\left[\frac{(a+b)^{p-2r}-(a+b)}{(a+b-1)^2}-\frac{p-2r-1}{a+b-1}\right] \\
& +\frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot a^r(ba^r)^2+(ba^r)^3\left[\frac{(a+b)^{p-3r}-(a+b)^2}{(a+b-1)^3}-\frac{(p-3r-2)(a+b)}{(a+b-1)^2}-\frac{(p-3r-2)^{2|1}}{1^{2|1}(a+b-1)}\right] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Werden die Gröfsen a und b in eine bestimmte Beziehung zu einander gebracht und wird $a+b=1$ gesetzt, so schliefsen die für A und B günstigen

Wahrscheinlichkeiten sich gegenseitig aus. Für diesen Fall nimmt die Reihe (7.) eine einfachere Gestalt an. Es entstehen nämlich Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$, welche leicht bestimmbare Werthe liefern; wie man sich aus der 3ten Abhandlung m. Different. Calculs überzeugen kann. Demnach ergiebt sich aus (7.) folgender Ausdruck:

$$8.\quad w = a^r + (p-r)ba^r - (p-2r)a^r ba^r - \frac{(p-2r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2 + \frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot a^r(ba^r)^2 - \frac{(p-3r)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^3 - \frac{(p-4r)^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot a^r(ba^r)^3 - \frac{(p-4r)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^4 \ldots$$

oder

$$9.\quad w = ba^r\left[\frac{p-r}{1}+\frac{1}{b}\right] - \frac{p-2r}{1}(ba^r)^2\left[\frac{p-2r-1}{2}+\frac{1}{b}\right] + \frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^3\left[\frac{p-3r-2}{3}+\frac{1}{b}\right] - \ldots$$

Hieraus findet sich auch die Wahrscheinlichkeit, dafs B ein Ereignifs wenigstens $s$mal hintereinander, mit der für ihn günstigen Wahrscheinlichkeit b in p Versuchen herbeizuführen im Stande sein werde. Sie ist

$$10.\quad w = ab^s\left[\frac{p-s}{1}+\frac{1}{a}\right] - (p-2s)(ab^s)^2\left[\frac{p-2s-1}{2}+\frac{1}{a}\right] + \frac{(p-3s)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ab^s)^3\left[\frac{p-3s-2}{3}+\frac{1}{a}\right] - \ldots$$

Zieht man die Gleichungen (8. oder 9.) von der Einheit ab, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs A im Stande sein werde, das fragliche Ereignifs unter den genannten Bedingungen höchstens $(r-1)$mal hintereinander herbeizuführen.

Die vorgelegte Aufgabe läfst sich leicht verallgemeinern, wenn den Gröfsen a und b bestimmte Werthe beigelegt werden. Sie stellt sich unter folgender Form dar.

A_1 trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bestimmt ist, gegen die Personen A_2, A_3, ... A_m in p Versuchen wenigstens $r$mal hintereinander herbeizuführen. Die Wahrscheinlichkeiten, welche das Unternehmen der Gegner begünstigen, sind der Reihe nach $b, c, d, \ldots m$. Jede der andern Personen versucht das Nämliche

gegen die übrigen. Die ihnen zukommenden Zahlen von Versuchen sind $s, t, u, \ldots\ldots z$. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Personen?

Die Wahrscheinlichkeit für A_1 findet sich leicht aus den Gleichungen dieses Paragraphs, indem die Gesammtzahl der Gegner durch Einen vertreten werden kann, für welchen die *Summe* sämmtlicher Wahrscheinlichkeiten Statt findet. Setzt man demnach in (7.) $b = b + c + d + \ldots\ldots + m$, so ist die Wahrscheinlichkeit für A_1:

$$11. \quad w =$$

$$a^r + (b+c+\ldots\ldots m)\, a^r \frac{(a+b+\ldots\ldots m)^{p-r} - 1}{a+b+\ldots\ldots m - 1}$$

$$-(p-2r)(b+c+\ldots\ldots m)\, a^{2r} - (b+c+\ldots\ldots m)^2 a^{2r} \left[\frac{(a+b+\ldots\ldots m)^{p-2r} - (a+b+\ldots\ldots m)}{(a+b+\ldots\ldots m-1)^2} - \frac{p-2r-1}{a+b+c+\ldots\ldots m-1}\right]$$

$$+ \frac{(p-2r)^{2|-1}}{1^{2|1}} (b+c+\ldots\ldots m^2) a^{3r} + (b+c+\ldots\ldots m)^3 a^{3r} \left[\frac{(a+b+\ldots\ldots m)^{p-3r} - (a+b+\ldots\ldots m)^2}{(a+b+\ldots\ldots m-1)^3} - \frac{(p-3r-2)(a+b+\ldots\ldots m)}{(a+b+\ldots\ldots m-1)^2} - \frac{(p-3r-2)^{2|1}}{1^{2|1}(a+b+\ldots\ldots m-1)}\right]$$

. . . .

Auf gleiche Weise findet sich die Wahrscheinlichkeit für jeden andern Theilnehmer. Die Gleichung (11.) vereinfacht sich sehr, wenn

$$a + b + c + \ldots\ldots + m = 1$$

gesetzt wird. Für diesen Fall hat man, aus den gleichen Gründen wie früher, folgende Gleichung zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für A_1:

$$12. \quad w = (1-a)\, a^r \left[\frac{p-r}{1} + \frac{1}{1-a}\right] - \frac{p-2r}{1} (1-a)^2 a^{2r} \left[\frac{p-2r-1}{2} + \frac{1}{1-a}\right] + \frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}} (1-a)^3 a^{3r} \left[\frac{p-3r-2}{3} + \frac{1}{1-a}\right]$$

. . . .

Die Wahrscheinlichkeit für A_2 ist

$$13. \quad w = (1-b)\, b^s \left[\frac{p-s}{1} + \frac{1}{1-b}\right] - \frac{p-2s}{1} (1-b)^2 b^{2s} \left[\frac{p-2s-1}{2} + \frac{1}{1-b}\right] + \frac{(p-3s)^{2|-1}}{1^{2|1}} (1-b)^3 b^{3s} \left[\frac{p-3s-1}{3} + \frac{1}{1-b}\right] \text{ u. s. w.}$$

Die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich leicht. Die in diesem Paragraph gefundenen Gleichungen lassen sich zu Anwendungen auf die Combinations-Lehre benutzen. Entfernt man nämlich den Nenner aus den vorstehenden Gleichungen, so kann man aus der Gleichung für die Wahrscheinlichkeit auf die Zahl der dem Unternehmen günstigen Fälle übergehen. Dabei ist jedoch zu beachten, dafs die Gröfsen, welche die Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, nicht quantitativ verschieden, sondern untereinander gleich angenommen werden müssen, weil sie in diesem Falle Elemente vertreten. Es ist demnach in (12.) $a=\frac{1}{m}$, $b=\frac{1}{m}$, $c=\frac{1}{m}$, ... $m=\frac{1}{m}$ zu setzen und dann mit m^p zu multipliciren. Hieraus ergiebt sich die Anzahl der Gruppen, in welchen ein bestimmtes Element wenigstens $r$mal hintereinander erscheinen wird, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden. Sie ist

$$
\begin{aligned}
14.\quad A = \; & m^{p-r} + (p-r)(m-1)m^{p-r-1} \\
& -(p-2r)(m-1)m^{p-2r-1} - \frac{(p-2r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-1)^2 m^{p-2r-2} \\
& + \frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-1)^2 m^{p-2r-2} + \frac{(p-3r)^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-1)^3 m^{p-3r-3} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

oder auch, in veränderter Form,

$$
\begin{aligned}
15.\quad A = \; & [(p-r)(m-1)+m]m^{p-r-1} \\
& - \frac{(p-2r)[(p-2r)(m-1)+m+1]}{1\cdot 2}(m-1)m^{p-2r-2} \\
& + \frac{(p-3r)(p-3r-1)[(p-3r)(m-1)+m+2]}{1\cdot 2\cdot 3}(m-1)^2 m^{p-3r-3} \\
& - \frac{(p-4r)(p-4r-1)(p-4r-2)[(p-4r)(m-1)+m+3]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(m-1)^3 m^{p-4r-4} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Hieraus läfst sich auch die Anzahl derjenigen Gruppen finden, in welchen ein bestimmtes Element höchstens $r$mal hintereinander u. s. w. erscheinen wird, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen gebildet werden. Die vorstehende Aufgabe ist ein besonderer Fall der allgemeinen im vorigen Paragraph, wie leicht zu sehen. Aus (7. §. 29.) läfst sie sich gleichfalls ableiten.

Von den in diesem Paragraph entwickelten Gleichungen hat *Laplace* (Théor. anal. d. prob. Nro. 12. Pg. 249) den in Nro. 9. dieses Paragraphs gegebenen Ausdruck in etwas veränderter Gestalt abgeleitet und sich dabei auf

den besondern Fall beschränkt, wenn sich die Wahrscheinlichkeiten der beiden Gegner A und B zur Einheit ergänzen.

§. 31.

A wünscht ein Ereignifs $r$mal eher hintereinander herbeizuführen, als B im Stande ist, ein für ihn günstiges Ereignifs $s$mal hintereinander zu erlangen. Die für A günstige Wahrscheinlichkeit im einzelnen Falle ist a; die für B günstige ist b. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A?

Die Benutzung der im vorigen Paragraph gefundenen Gleichungen dient zur Beantwortung der vorliegenden Frage. Wir legen die Gleichung (8.) zu Grunde, worin $a+b=1$ ist, weil eine andere Voraussetzung die ohnehin weitläufige Rechnung noch weitläufiger machen würde. Die genannte Gleichung bleibt so lange in Kraft, als die Zahl der angestellten Versuche $r+s-1$ nicht überschreitet. Wird sie gröfser, so können Fälle eintreten, welche für B entscheiden. Sie müssen ausgeschieden werden. Die für B entscheidenden Fälle beginnen mit dem $(r+s)$ten und endigen mit dem letzten Versuche. Es kommen daher die Versuche vom $(r+s)$ten, $(r+s+1)$ten u. s. w. bis zum $(p-r-s+1)$ten in Betracht. In allen diesen Fällen sind die Schlüsse für B eben so zu machen, wie sie bei Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für A gemacht wurden. Es kommen folgende Fälle vor.

a. Das für B günstige Ereignifs tritt in den s ersten Versuchen hintereinander ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür verbindet sich mit derjenigen, welche angiebt, wie oft das für A günstige Ereignifs $r$mal in $p-s$ nachfolgenden Versuchen eintreffen kann. Die letztere ergiebt sich, wenn in (8. §. 30.) $p-s$ statt p gesetzt wird. Man erhält

$$1.\quad w_1 = b^s a^r\left(1-(p-2r-s)ba^r+\frac{(p-3r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$
$$+b^s ba^r\left(\frac{p-r-s}{1}-\frac{(p-2r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^3-\ldots\right).$$

b. Das für B günstige Ereignifs kann in $s+1$ Versuchen $s$mal hintereinander eintreten. Dies setzt voraus, dafs das für A günstige Ereignifs im ersten Versuche vorausgegangen ist. Hiefür ist die Wahrscheinlichkeit ab^s. $p-s-1$ Versuche können folgen, bei welchen das für A günstige Ereignifs $r$mal hintereinander eintreten kann. Die Wahrscheinlichkeit, dafs dies geschehe, ergiebt sich, wenn in (8. §. 30.) $p-s-1$ statt p gesetzt wird. Die Verbindung

beider Wahrscheinlichkeiten giebt

$$2.\quad w_2 = ab^s a^r\left(1-(p-2r-s-1)ba^r+\frac{(p-3r-s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$

$$+ab^s ba^r\left(\frac{p-r-s-1}{1}-\frac{(p-2r-s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}.ba^r+\frac{(p-3r-s-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\ldots\right).$$

c. Eben so findet sich für die nachfolgenden, auszuscheidenden Fälle:

$$3.\quad w_3 =$$

$$(a+b)ab^s a^r\left(1-\frac{(p-2r-s-2)}{1}.ba^r+\frac{(p-3r-s-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$

$$+(a+b)ab^s ba^r\left(\frac{p-r-s-2}{1}-\frac{(p-2r-s-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}.ba^r+\frac{(p-3r-s-2)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\ldots\right),$$

$$4.\quad w_4 =$$

$$(a+b)^2 ab^s a^r\left(1-\frac{(p-2r-s-3)}{1}.ba^r+\frac{(p-3r-s-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$

$$+(a+b)^2 ab^s ba^r\left(\frac{p-r-s-3}{1}-\frac{(p-2r-s-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}.ba^r+\frac{(p-2r-s-3)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^3-\ldots\right)$$

u. s. w. Wird in diesen Formeln der Annahme nach $a+b=1$ gesetzt, so lassen sich die ersten, zweiten, u. s. w. Glieder der ersten und zweiten horizontalen Reihen in (2, 3, 4, ...), welche gleichen Potenzen von ba^r zugehören, vereinigen, welches

$$5.\quad w_0 = ab^s a^r\left(\frac{p-r-s}{1}-\frac{(p-2r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}}.ba^r+\frac{(p-3r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$

$$+ab^s ba^r\left(\frac{(p-r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}}-\frac{(p-2r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}}.ba^r+\frac{(p-3r-s)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$

giebt. Die Formel (1.) läfst keine Vereinigung zu. Der Ausdruck (5.) liefert so lange ein richtiges Resultat, als die Potenzen des begleitenden Binomiums $a+b$ kleiner sind als die $s$te. Erheben sie sich bis zu s, und darüber, so enthalten sie Vielfache von b, welche gegen A entscheiden und schon ausgeschieden wurden. Ihre Zahl ist zu suchen und auszuscheiden. Dies geschieht, wenn man die eben gemachten Schlüsse mit denen im Anfange des vorigen Paragraph vereinigt und dabei die Gleichung (8. §. 30.) benutzt. Die hiernach auszuscheidenden Werthe sind

$$6.\quad u_1 =$$

$$b^s ab^s a^r\left(\frac{(p-r-2s)}{1}-\frac{(p-2r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}}.ba^r+\frac{(p-3r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$

$$+b^s ab^s ba^r\left(\frac{(p-r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}}-\frac{(p-2r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}}.ba^r+\frac{(p-3r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^2-\ldots\right),$$

$$7.\quad u_2 =$$

$$ab^s ab^s a^r \left(\frac{p-r-2s-1}{1} - \frac{(p-2r-2s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s-1)^{3|-1}}{1^{3|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right)$$

$$+ ab^s ab^s ba^r \left(\frac{(p-r-2s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \frac{(p-2r-2s-1)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s-1)^{4|-1}}{1^{4|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right)$$

u. s. w. Setzt man diese Ableitungen fort, so führen sie wieder zu summirbaren Reihen. Der Ausdruck (7.) und die ihm folgenden lassen sich in nachstehenden vereinigen:

$$8.\quad u_0 = ab^s ab^s a^r \left[\frac{(p-r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \frac{(p-2r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right]$$

$$+ ab^s ab^s ba^r \left[\frac{(p-r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} - \frac{(p-2r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{5|-1}}{1^{5|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right].$$

Stellt man die Ausdrücke (1. und 5.), (6. und 8.) zusammen, und bemerkt, dafs die zweite horizontale Reihe in (1.) mit der ersten in (5.) übereinstimmt, nur dafs jene mit a und diese mit b multiplicirt ist, so lassen sich beide in einen vereinigen, da $a + b = 1$ ist. Das Gleiche gilt von (6. und 8.). Dies führt zu folgenden, von der Gleichung (8. §. 30.) auszuscheidenden Reihen:

$$9.\quad u = b^s a^r \left(1 - \frac{(p-2r-s)}{1} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right)$$

$$+ b^s a^r \left(\frac{p-r-s}{1} - \frac{(p-2r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right)$$

$$+ ab^s ba^r \left(\frac{(p-r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \frac{(p-2r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-s)^{4|-1}}{1^{4|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right)$$

$$- ba^s b^s a^r \left(\frac{(p-r-2s)}{1} - \frac{(p-2r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right)$$

$$- ab^s b^s a^r \left(\frac{(p-r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \frac{(p-2r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right)$$

$$- ab^s ab^s ba^r \left(\frac{(p-r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} - \frac{(p-2r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{5|-1}}{1^{5|1}} (ba^r)^2 - \ldots\right).$$

Das Fortgangsgesetz ist deutlich. Die in den Klammern eingeschlossenen Reihen zeigen hinsichtlich der begleitenden *Potenzen* von ba^r ein einfaches und gleiches Gesetz an. In den *Facultäten* aber sind sie verschieden. Das Fortgangsgesetz der Facultäten hangt von dem Grundfactor der ersten Facultät und ihrem Exponenten ab. Kennt man diese, so sind auch die der übrigen Glieder bekannt. Die Exponenten der Facultäten wachsen der Reihe nach um die Einheit, und der Grundfactor nimmt um die Gröfse r ab. Demzufolge lassen sich der Kürze und Übersicht wegen die Reihen in (9.) auf

folgende Weise bezeichnen:

$$R_{p-r-s,0};\quad R_{p-r-s,1};\quad R_{p-r-s,2};$$
$$R_{p-r-2s,1};\quad R_{p-r-2s,2};\quad R_{p-r-2s,3}.$$

Die allgemeine Form hiefür ist

$$10.\quad M = R_{p-xr-zs,u};$$

u bedeutet den Exponenten der Bruchfacultät des ersten Gliedes und $p-xr-zs$ den Grundfactor der Facultät. Demnach nimmt (9.) folgende Form an:

$$11.\quad u = b^s a^r R_{p-r-s,0} + b^s a^r R_{p-r-s,1} + ab^s ba^r R_{p-r-s,2}$$
$$-(b^s ab^s a^r R_{p-r-2s,1} + ab^s b^s a^r R_{p-r-2s,2} + ab^s ab^s ba^r R_{p-r-2s,3}).$$

Nächst dieser Ausscheidung ist noch eine andere hinsichtlich des für A günstigen Ereignisses nöthig. Die Ausdrücke (3. und 4.), und die ihnen zugehörigen enthalten die Potenzen von $a+b$. Erheben sich diese bis zur gehörigen Höhe, so enthalten sie Fälle, die für A entscheiden, während sie als gegen A entscheidend aufgeführt werden. Diese müssen gesucht und ausgeschieden werden. Sie beginnen mit dem $(2r+s)$ten Versuche, und gehen bis zu Ende. Ihre Bestimmung unterliegt der bisherigen Schlufsweise.

Das für A günstige Ereignifs kann $r$mal hintereinander eintreten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist a^r. Sie verbindet sich mit der Wahrscheinlichkeit, welche angiebt, wie oft ein Ereignifs $s$mal mit seinem Gegentheil zusammentreffen könne. Demnach ist in den drei ersten Reihen von (9. oder 11.) $p-r$ statt p zu setzen. Es ergiebt sich

$$12.\quad t = a^r b^s a^r R_{p-2r-s,0} + a^r b^s a^r R_{p-2r-s,1} + a^r ab^s ba^r R_{p-2r-s,2}.$$

Das für A günstige Ereignifs kann in den folgenden Versuchen $r$mal hintereinander eintreffen; welches

$$13.\quad t_2 = ba^r b^s a^r R_{p-2r-s-1,0} + ba^r b^s a^r R_{p-2r-s-1,1} + ba^r ab^s ba^r R_{p-2r-s-1,2},$$
$$t_3 = (a+b)\, ba^r b^s a^r [R_{p-2r-s-2,0} + R_{p-2r-s-2,1} + ab R_{p-2r-s-2,2}],$$
$$t_4 = (a+b)^2\, ba^r b^s a^r [R_{p-2r-s-3,0} + R_{p-2r-s-3,1} + ab R_{p-2r-s-3,2}],$$

. . . .

giebt. Diese Reihen lassen sich summiren und sind, da $a+b=1$ ist, in folgender Reihe enthalten:

$$14.\quad t_0 = ba^r b^s a^r R_{p-2r-s,1} + ba^r b^s a^r R_{p-2r-s,2} + ba^r ab^s ba^r R_{p-2r-s,3}.$$

Die Formeln (12. und 14.) vereinigen sich zu folgender:

$$15.\quad t = a^r b^s a^r R_{p-2r-s,0} + (1+b) a^r b^s a^r R_{p-2r-s,1} + (1+a) a^r b^s ba^r R_{p-2r-s,2}$$
$$+ ba^r ab^s ba^r R_{p-2r-s,3}.$$

Die Ausscheidungen in (13.) gelten so lange, als die Potenzen des begleitenden Binomiums niedriger als vom $s$ten Grade sind. Werden sie so grofs, oder

gröfser als die $r$te, so enthalten sie Fälle, welche für A entscheiden und schon zugezählt wurden. Sie sind dann auszuscheiden. Ihre Ausscheidung führt zu folgender Formel:

$$16.\quad v = a^r b a^r b^s a^r R_{p-3r-s,1} + (1+b) a^r b a^r b^s a^r R_{p-3r-s,2}$$
$$+ (1+b) a^r b a^r b^s a^r R_{p-3r-s,3} + b a^r b a^r b^s a^r R_{p-3r-s,4}.$$

Zugleich mufs eine Ausscheidung aus (15.) hinsichtlich b erfolgen, wenn die Potenzen von $a+b$ zu der gehörigen Höhe gestiegen sind. Die Ausscheidung giebt folgenden Ausdruck:

$$17.\quad z = b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,0} + 2 b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,1} + (1+2ab) b^{2s} b^{2r} R_{p-2r-2s,2}$$
$$+ 2 b b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,3} + a^2 b^2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,4}.$$

Eben so mufs eine Ausscheidung aus (8.) hinsichtlich a gemacht werden. Sie giebt

$$18.\quad x = a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,1} + (1+b) a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,2} + (1+a) b a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,3}$$
$$+ a^2 b^2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,4}.$$

Die Rechnung bewegt sich zwar in grofsen Kreisen, unterliegt jedoch einem festen Gange. Eine Ausscheidung führt die andere nach sich. Vereinigt man die gefundenen Resultate, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$19.\quad w = a^r R_{p-r,0} + b a^r R_{p+r,1}$$
$$- b^s a^r R_{p-r-s,0} - b^s a^r R_{p-r-s,1} - ab a^r b^s R_{p-r-s,2}$$
$$+ ab^{2s} a^r R_{p-r-2s,1} + ab^{2s} a^r R_{p-r-2s,2} + a^2 b a^r b^{2s} R_{p-r-2s,3}$$
$$- a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,1} - (1+b) a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,2} - (1+a) ab a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,3}$$
$$- a^2 b^2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,4}$$

. . . .

$$+ a^{2r} b^s R_{p-2r-s,0} + (1+b) a^{2r} b^s R_{p-2r-s,1} + (1+a) b a^{2r} b^s R_{p-2r-s,2}$$
$$+ b^2 a a^{2r} b^s R_{p-2r-s,3}$$
$$- b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,0} - 2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,1} - (1+2ab) b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,2}$$
$$- 2 b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,3} - a^2 b^2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,4}$$

. . . .

Obgleich diese Entwicklung in einem weiten Kreise sich bewegt, läfst sich doch das Fortgangsgesetz erkennen. Mit den Potenzen a^r, b^s sind öfters die Factoren b und a verbunden. Das Gesetz, welches diesen Verbindungen zum Grunde liegt, fällt mit der entwickelten Darstellung folgender Producte zusammen:

$$1+b = 1+b,$$
$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab = 1+1+ab,$$
$$(1+b)(1+a)(1+b) = 1+(1+b)+(1+a)b+bab,$$
$$(1+a)(1+b)(1+a)(1+b) = 1+2+(1+2ab)+2ab+abab.$$

u. s. w., wenn nämlich allenthalben, wo es geschehen kann, $a+b=1$ gesetzt wird. So weitläufig die Gleichung (19.) ist, so läfst sie sich doch bedeutend reduciren, wenn man $a=b=\frac{1}{2}$ setzt. Dann giebt sie folgende einfache Formel:

$$20.\quad w=\frac{p-r+2}{2^{r+1}}-\frac{(p-2r+1)(p-2r+2\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 2^{2r+1}}+\frac{(p-3r+1)(p-3r+2)(p-3r+3\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{3r+1}}-\ldots$$

Diese Gleichung bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs A ein Ereignifs $r$mal eher in p Versuchen herbeiführen wird, als B das Gegentheil in r Versuchen zu thun im Stande ist, wenn A und B die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, im einzelnen Falle zu siegen. Die Gleichung (20.) läfst sich auch aus den Gleichungen (19. oder 22. §. 29.) ableiten, wenn letztere durch 2 dividirt wird.

Vergleicht man die Entwicklungen in (§. 29.) mit denen in (§. 30. und 31.), so zeigt sich, dafs die letztern dann dienlich sind, wenn für die Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen im einzelnen Falle bedingen, besondere Werthe nöthig werden, dagegen die von (§. 29.), wenn die Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen im einzelnen Falle bedingen, einander gleich sind. Beide Betrachtungsarten haben ihr Eigenthümliches.

Bemerkt man dies, erwägt, dafs jedes der in (§. 29.) vorkommenden Elemente durch die Einheit dargestellt werden kann, wenn man dieser Einheit die Gesammtzahl der Elemente zum Nenner giebt, wodurch der Werth der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen im einzelnen Falle bestimmt wird, und bringt hiemit in Verbindung, dafs das wiederholte Aneinanderreihen eines Elements bei den Versetzungen mit Wiederholungen eben so oft in den Gruppen einer bestimmten Classe vorkommt, als das eines zweiten oder dritten Elements, so führt dies zur Beantwortung folgender Frage.

m Personen spielen mit gleicher Wahrscheinlichkeit im einzelnen Falle zu gewinnen, und unter folgender Bedingung. In einer Urne sind m verschieden bezeichnete Marken, von welchen jede für eine bestimmte Person gilt. Es wird $p$mal aus der Urne gezogen und jedesmal eine Marke herausgenommen, die nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt wird. Derjenige bekommt eine bestimmte Summe, dessen Marke $r$mal hinter einander erscheint. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Theilnehmer?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich aus (14.) oder aus (15. §. 29.), wenn eine dieser Gleichungen durch die Zahl der Theilnehmer dividirt wird; denn nach den obigen Bemerkungen ist die Zahl der günstigen Fälle für jeden gleich grofs. Dieses giebt:

$$21. \quad w = \frac{(m-1)}{m^{k+1}}\left[p-k+\frac{m}{m-1}\right] - \frac{(p-2k+1)(m-1)^2}{1\cdot 2\cdot m^{2k+1}}\left[p-2k+\frac{2m}{m-1}\right]$$
$$+ \frac{(p-3k+1)^{2|1}(m-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m^{3k+1}}\left[p-3k+\frac{3m}{m-1}\right]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel nach p Versuchen geendet sein werde, ist in (14.) oder in (15. §. 29.) gegeben.

Hieraus ergiebt sich auch die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel gerade im $p$ten Versuche beendigt sein werde. Denn es ist die Wahrscheinlichkeit, dafs es in den unmittelbar vorhergehenden Versuchen nicht geendigt sein werde, mit derjenigen zu verbinden, dafs es in einer bestimmten Anzahl endigen werde.

§. 32.

In einer Urne befinden sich r verschiedene Gruppen von Kugeln, jede von n Kugeln, die mit 1, 2, 3, ... n bezeichnet sind. m Kugeln jeder Art, mit den nämlichen Zeichen, werden besonders beachtet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus, legt die gezogene Kugel nicht in die Urne zurück, und wiederholt dieses Verfahren $s$mal. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in irgend p zusammengehörigen, hintereinander folgenden Ziehungen, lauter Kugeln erscheinen werden, welche das gleiche Zeichen haben?

Um die den Resultaten günstige Gruppen-Anzahl zu finden, ist zu bemerken, dafs der Aufgabe genügt wird, wenn Kugelgruppen von einerlei Zeichen gerade in der ersten, oder zweiten, dritten, u. s. w., oder endlich in den letzten p Ziehungen erscheinen. p hintereinander folgende zusammengehörige Ziehungen soll eine Ziehungsreihe heifsen. Die Zahl der Ziehungsreihen ist s. Die Gruppen, welche in den einzelnen Ziehungsreihen dem Erfolge günstig sind, gehören r verschiedenen Arten an. Jede Art bringt $r(r-1)(r-2)\ldots(r-p+1) = r^{p|-1}$ verschiedene Fälle hervor. Diese Kugel-Arten haben m verschiedene Zeichen. Es können demnach in jedem einzelnen Wiederholungsfalle

$$1. \quad A_1 = m\cdot r^{p|-1}$$

auflösende Gruppen vorkommen. Nun sind s verschiedene Ziehungsreihen möglich: also werden folgende Fälle zu unterscheiden sein.

a. Das Unternehmen gelingt in der ersten Ziehungsreihe. Jeder auflösenden Gruppe kann jede beliebige Zusammenstellung aus den ergänzenden Kugelgruppen in den nachfolgenden $ps-p$ Ziehungen folgen. Die hieraus sich ergebende Gruppen-Anzahl ist, in Rücksicht auf (1.),

$$B_1 = m\cdot r^{p|-1}(nr-p)^{ps-p|-1}.$$

b. Das Unternehmen gelingt in der *zweiten* Ziehungsreihe. Jeder von den in (1.) angegebenen Gruppen können alle beliebigen Gruppen aus der ergänzenden Kugel-Anzahl zur *p*ten Classe vorausgehen, und die zur $(ps-2p)$ten kann folgen. Die hieraus sich ergebende Gruppen-Anzahl ist

$$B_2 = (nr-p)^{p|-1} m\cdot r^{p|-1}(nr-2p)^{sp-2p|-1} = m\cdot r^{p|-1}(rn-p)^{(s-1)p|-1}.$$

c. Eben so findet sich für die Zahl der günstigen Gruppen, welche in der *dritten* Ziehungsreihe erscheinen,

$$B_3 = (nr-p)^{2p|-1} m\cdot r^{p|-1}(nr-3p)^{sp-3p|-1} = m\cdot r^{p|-1}(rn-p)^{(s-1)p|-1}$$

u. s. w. Auf gleiche Weise ergiebt sich für die Zahl der, in der letzten Ziehungsreihe möglichen oder günstigen Gruppen:

$$B_s = (nr-p)^{ps-p|-1} m\cdot r^{p|-1}.$$

Werden die Werthe für B_1, B_2, B_3, ... B_s zusammengezählt, so ergiebt sich für die Summe der auflösenden Gruppen in sämmtlichen Ziehungsreihen:

$$2.\quad B = s\cdot m\cdot r^{p|-1}(rn-p)^{ps-p|-1}.$$

Dieser Ausdruck wird zu weitern Anwendungen dienen. Die Schlüsse, welche zu (2.) führten, geben nur bis zur zweiten Ziehungsreihe ein richtiges Resultat. Der zweiten und den spätern Ziehungsreihen gehen nämlich Kugelgruppen von p, $2p$, $3p$, ... $(s-1)p$ Dimensionen vorher, in welchen schon auflösende Gruppen erschienen sein können. Sie müssen gesucht und ausgeschieden werden. Ist nun eine auflösende Gruppe in der zweiten Ziehungsreihe, oder in einer spätern erschienen, so kann ihr eine auflösende Gruppe vorhergegangen sein. Hierbei kommen folgende zwei Fälle vor:

α. Die Kugeln der vorhergehenden Ziehungsreihe haben das nämliche Zeichen.

β. Sie haben ein anderes Zeichen.

Nach den Bedingungen des ersten Falles sind schon p Kugeln mit dem nämlichen Zeichen erschienen: daher sind noch $r-p$ Kugeln mit diesem Zeichen in der Urne zurück. Die hieraus sich ergebende Gruppen-Anzahl ist

$$(r-p)(r-p-1)(r-p-2)\ldots(r-2p+1) = (r-p)^{p|-1}.$$

Diese Anzahl mufs sich mit der Zahl aller der Gruppen verbinden, welche entstehen, wenn die auflösende Gruppe in der zweiten, dritten, ... *s*ten Ziehungsreihe erscheint und die vorausgehende während dieses allmäligen Zurückschreitens alle möglichen Ziehungsreihen durchläuft. Die Zahlen der Gruppen, welche aus diesem Grunde ausgeschieden werden müssen, finden sich, wenn in (2.), der Reihe nach 1, 2, 3, ... $s-1$ statt s, $r-p$ statt r in der Facultät $r^{p|-1}$, $rn-2p$ statt $rn-p$ gesetzt und m vernachlässigt wird, weil Kugeln vom gleichen Zeichen in Betracht kommen. Verbindet man damit die

Kugelgruppen an den ergänzenden Stellen, so ergiebt sich Folgendes:

$$C_1 = 1\cdot(r-p)^{p|-1}(rn-2p)^{0|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{ps-2p|-1} = 1\cdot m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$

$$C_2 = 2(r-p)^{p|-1}(rn-2p)^{p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} = 2m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$

$$C_3 = 3(r-p)^{p|-1}(rn-2p)^{2p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(rn-4p)^{(s-4)p|-1} = 3m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$

. . . .

$$C_{s-1} = (s-1)(r-p)^{p|-1}(rn-2p)^{sp-2p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(rn-(s-2)p)^{0|-1}$$
$$= (s-1)m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1}.$$

Dies läfst sich in folgenden Ausdruck vereinigen:

$$C_s = \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1}.$$

Nach den Bedingungen im zweiten Falle sind p Kugeln erschienen, die ein anderes Zeichen haben. Jede Gruppe, mit Kugeln von einem bestimmten Zeichen, kann sich mit allen möglichen Gruppen von Kugeln mit einem der übrigen $m-1$ Zeichen verbinden und alle möglichen Ziehungsreihen von der zweiten an durchlaufen, während eine der vorhergehenden auflösenden Gruppen jede vorhergehende Stelle einnehmen kann. Aufserdem treten mit diesen Gruppen verschieden-bezeichneter Kugeln alle möglichen Gruppen aus der ergänzenden Kugel-Anzahl in Verbindung. Man findet die Zahlen auszuscheidender Gruppen, wenn man in (2.) der Reihe nach $s = 1, 2, 3, \ldots s-1$, $m-1$ statt m, $rn-2p$ statt $rn-p$ setzt und jeden Ausdruck mit (1.) und der ergänzenden Gruppen-Anzahl verbindet. Diese Bemerkungen geben folgende Reihen:

$$D_1 = 1\cdot(m-1)r^{p|-1}(rn-2p)^{0|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(nr-2p)^{ps-2p|-1}$$
$$= 1\cdot m^{2|-1} r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{p(s-2)|-1},$$

$$D_2 = 2\cdot(m-1)r^{p|-1}(rn-2p)^{p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(nr-3p)^{p(s-3)-1}$$
$$= 2\cdot m^{2|-1} r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$

$$D_3 = 3\cdot(m-1)r^{p|-1}(rn-2p)^{2p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(nr-4p)^{p(s-4)|-1}$$
$$= 3\cdot m^{2|-1} r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$

. . . .

$$D_{s-1} = (s-1)(m-1)r^{p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}$$
$$= (s-1)m^{2|-1} r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1}.$$

Sie lassen sich in folgenden Ausdruck vereinigen:

$$D_s = \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{p(s-2)|-1}.$$

Werden die Werthe von C_s und D_s zusammengezählt, so ergiebt sich folgende, von (2.) auszuscheidende Gruppen-Anzahl:

$$3.\quad C = \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[m\cdot r^{2p|-1} + m^{2|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}\right](rn-2p)^{(s-2)p|-1}.$$

Dieser Ausdruck läfst sich, wie in (§. 27.), durch ein Schema vorstellen. Wir wählen dazu Folgendes:

$$4.\quad C_0 = \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}[m G_2 + m^{2|-1} G_1 H_1](rn - 2p)^{ps-2p|-1}.$$

Hier bezeichnet G_2 Gruppen von $2p$ Dimensionen, in welchen nur Kugeln von einerlei Zeichen vorkommen, G_1 Gruppen von p Dimensionen, in welchen Kugeln von einerlei Zeichen, und H_1 gleichfalls Gruppen von p Dimensionen, in welchen nur Kugeln von einerlei Zeichen vorkommen, die aber ein anderes Zeichen als die unter G_1 begriffenen haben.

Die Schlüsse, welche zu den Formeln (3. und 4.) führten, sind so lange richtig, bis die zweite der zwei auflösenden Gruppen auf die dritte Ziehungsreihe gerückt ist und dann allmälig alle möglichen spätern Ziehungsreihen durchläuft. In jedem dieser Fälle kann noch eine dritte auflösende Gruppe den beiden in (3.) bezeichneten vorangehen. Demnach treten drei auflösende Gruppen, jede als Ganzes betrachtet, zu einander in Beziehung. Die letzte bestimmt die Stellungen, von der dritten Ziehungsreihe an. Sie durchläuft allmälig $s-2$ Ziehungsreihen. In jeder einzelnen Stellung können die beiden vorhergehenden unter sich alle Ziehungsreihen durchlaufen. Dieses Durchlaufen fällt mit den Zerstreuungen von zwei Elementen in die gehörige Fächerzahl zusammen. Es treten folgende Fälle ein:

γ. Die drei auflösenden Gruppen enthalten Kugeln mit nur einem Zeichen;

δ. Sie enthalten Kugeln mit zweierlei Zeichen;

ε. Sie enthalten Kugeln mit dreierlei Zeichen.

Diese drei Fälle lassen sich nach der Analogie von (4.) auf folgende Weise darstellen:

$$G_1 G_1 G_1,\quad G_1 G_1 H_1,\quad G_1 H_1 K_1.$$

Nun ist leicht zu sehen, dafs die auflösenden Gruppen, welche Kugeln mit verschiedenen Zeichen enthalten, unter sich verschiedene Stellungen einnehmen können, und dafs der Ausdruck $G_1 G_1 H_1$ auf folgende Stellungen dieser Gruppen deuten kann:

$$G_1 G_1 H_1 + G_1 H_1 G_1 + H_1 G_1 G_1 = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}\cdot G_2 H_1,$$

und der Ausdruck $G_1 H_1 K_1$ auf folgende Stellungen:

$$G_1 H_1 K_1 + G_1 K_1 H_1 + H_1 G_1 K_1 + H_1 K_1 G_1 + K_1 G_1 H_1 + K_1 H_1 G_1$$
$$= 3\cdot 2\cdot 1\cdot G_1 H_1 K_1.$$

Die Gruppen-Anzahl, welche durch den Ausdruck $G_1 G_1 G_1 = G_3$, der nur

Kugeln von einerlei Zeichen enthält, bedingt wird, ist $=\ldots$, wie sich durch eine einfache Erörterung zeigen läfst. Die verschiedenen Stellungen, welche die zwei vorangehenden auflösenden Gruppen in Beziehung auf die dritte einnehmen können, führen zu folgendem Ausdruck, wenn dabei die Kugelgruppen auf den ergänzenden Ziehungsreihen in die Rechnung aufgenommen werden:

$$E_1 = \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

$$+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

$$+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(s-1)(s-2)}{1\cdot 2}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

$$= \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}.$$

Die Gruppen-Anzahl, welche durch den Ausdruck $\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}\cdot G_2 H_1$ bedingt wird, ist von Kugeln mit zwei verschiedenen Zeichen veranlafst. Die des einen Zeichens sind $2p$ Kugeln, die des andern p. Die Zahl der Fälle, welche durch alle möglichen Zusammenstellungen dieser Kugeln unter sich erzeugt werden, ist

$$M_1 = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}\cdot m(m-1)\,r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}.$$

Die verschiedenen Stellungen, welche die zwei vorhergehenden auflösenden Gruppen in allen Ziehungsreihen in Beziehung auf die dritte einnehmen können, führen zu folgender Formel, wenn die ergänzenden Kugelgruppen in den übrigen Ziehungsreihen in Rechnung gezogen werden:

$$E_2 = \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

$$+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

$$+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(s-1)(s-2)}{1\cdot 2}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

$$= \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}.$$

Die Gruppen, welche der Ausdruck $3\cdot 2\cdot 1\cdot G_1 K_1 H_1$ andeutet, gehören drei verschiedenen Zeichen zu. Die Versetzungen, welche in den drei verschiedenen Kugel-Arten nöthig werden, sind schon vorgesehen; daher sind sie in der Facultät von m wieder zu entfernen. Es gelten hier ähnliche Bemerkungen, wie in (§. 25.). Die Anzahl der Kugelgruppen, welche hierher gehören, sind in dem Ausdrucke

$$3^{3|-1}\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}$$

enthalten. Die Stellungen, welche die zwei vorhergehenden auflösenden Gruppen in allen Ziehungsreihen in Beziehung zur dritten einnehmen können, führen zu folgender Formel, wenn die ergänzenden Kugelgruppen auf den übrigen Ziehungsreihen in Rechnung gezogen werden:

$$E_3 = \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot 3^{3|-1}\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{p(s-3)|-1}$$

$$+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot 3^{3|-1}\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{p(s-3)|-1}$$

$$+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot 3^{3|-1}\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{p(s-3)|-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(s-1)(s-2)}{1\cdot 2}\cdot 3^{3|-1}\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{p(s-3)|-1}$$

$$= \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot 3^{3|-1}\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{p(s-3)|-1}$$

Werden nun die Werthe von E_1, E_2, E_3 zusammengezählt, so ergiebt sich folgende Zahl von (3.) auszuscheidender Gruppen:

$$5.\quad D = \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[m\cdot r^{3p|-1}+\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}+3^{3|-1}\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}(r^{p|-1})^3\right](rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

Auch diesen Ausdruck kann man durch ein Schema geben. Es ist

$$6.\quad D = \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[m\,G_1+\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\,m^{2|-1}\,G_2 H_1+3^{3|-1}\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\,G_1 H_1 K_1\right](rn-3p)^{(s-3)p|-1}.$$

Die Vorzahlen der Exponenten p, welche den Facultäten von r zugehören, bilden Summen der Verbindungen mit Wiederholungen zur 1ten, 2ten, 3ten, ... Classe. Die begleitenden Facultäten von m haben so viele Factoren, als die Verbindungsclasse angiebt, und werden durch eine steigende Facultät von 1 gemessen, die so viele Factoren zählt, als gleiche Exponenten von r vorkommen; die begleitende Facultät $3^{3|-1}$ wird durch so viele steigende Facultäten

von 1 dividirt, als Exponenten der Facultäten von r vorkommen. Die Verschiedenen der Exponenten p geben die Dimensionen dieser Facultäten an.

Die zur Entwicklung der Gleichung (5.) gemachten Schlüsse sind so lange richtig, bis die letzte der auflösenden Gruppen in die vierte Ziehungsreihe gerückt ist. Ist dies geschehen, so müssen wieder Ausscheidungen gemacht werden, weil eine vierte auflösende Gruppe unter den vorausgehenden Kugelgruppen enthalten sein kann. Die vier auflösenden Gruppen machen unter sich Versetzungen und nehmen alle möglichen Stellungen vor der letzten an, während diese von einer Ziehungsreihe zur andern zurücktritt. Es können folgende Fälle eintreten:

ζ. Die vier auflösenden Gruppen haben gleiche Zeichen;

η. Drei haben einerlei, die vierte ein anderes Zeichen;

$\varkappa$. Zwei und zwei haben einerlei Zeichen;

λ. Zwei haben einerlei, die dritte ein zweites, die vierte ein drittes Zeichen;

μ. Die vier Gruppen haben vier verschiedene Zeichen.

Hienach ergeben sich folgende Formen:

$$G_1 G_1 G_1 G_1 = G_4, \quad G_1 G_1 G_1 H_1 = G_3 H_1, \quad G_1 G_1 H_1 H_1 = G_2 H_2,$$
$$G_1 G_1 H_1 K_1 = G_2 H_1 K_1, \quad G_1 H_1 K_1 L_1 = G_1 H_1 K_1 L_1.$$

Wendet man auf diese Darstellungen die obigen Bemerkungen an und berücksichtigt dabei die in (§. 25.) ausgesprochenen Gesetze, welche aus ähnlichen Betrachtungen abgeleitet wurden, so erhält man folgende Zahlen-Ausdrücke:

$$G_4 = \frac{4^{4|-1}}{1^{4|1}} \cdot m \cdot r^{4p|-1}, \qquad G_3 H_1 = \frac{4^{4|-1}}{1^{3|1}} \cdot m^{2|-1} \cdot r^{3p|-1} \cdot r^{p|-1},$$

$$G_2 H_2 = \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{2|1}} \cdot \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot r^{2p|-1} \cdot r^{2p|-1}, \quad G_2 H_1 K_1 = \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{1|1} \cdot 1^{1|1}} \cdot \frac{m^{3|-1}}{1^{2|1}} \cdot r^{2p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1},$$

$$G_1 H_1 K_1 L_1 = 4^{4|-1} \cdot \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1}.$$

Werden die verschiedenen Stellungen berücksichtigt, welche die vier auflösenden Gruppen in s Ziehungsreihen untereinander einnehmen können, nebst der Zahl der ergänzenden Gruppen auf den übrigen $s-4$ Ziehungsreihen, so ergiebt sich folgende Zahl von (5.) auszuscheidender Gruppen:

$$7. \quad E = \frac{s^{4|-1}}{1^{4|1}} \Big[m \cdot r^{4p|-1} + \frac{4^{4|-1}}{1^{3|1}} \cdot m^{2|-1} \cdot r^{3p|-1} \cdot r^{p|-1} + \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{2|1}} \cdot \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} (r^{2p|-1})^2$$
$$+ \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{m^{3|-1}}{1^{2|1}} \cdot r^{2p|-1} (r^{p|-1})^2 + 4^{4|-1} \cdot \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} (r^{p|-1})^4 \Big] (rm + 4m)^{(s-4)p|-1}.$$

Auch hier erkennt man leicht das oben angegebene Gesetz. Ihm zufolge ergiebt sich für die auszuscheidende Gruppen-Anzahl folgender Ausdruck:

$$8.\quad F=\frac{s^{5|-1}}{1^{5|1}}\Big[m\cdot r^{5p|-1}+\frac{s^{5|-1}}{1^{4|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{4p|-1}\cdot r^{p|-1}+\frac{s^{5|-1}}{1^{2|1}\cdot 1^{3|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{3p|-1}\cdot r^{2p|-1}$$

$$+\frac{s^{5|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{m^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot r^{3p|-1}(r^{p|-1})^2+\frac{s^{5|-1}}{1^{2|1}\cdot 1^{2|1}}\cdot\frac{m^{3|-2}}{1^{2|1}}(r^{2p|-1})^2\, r^{p|-1}$$

$$+\frac{s^{5|-1}}{1^{5|1}}\cdot\frac{m^{4|-1}}{1^{3|1}}\cdot r^{2p|-1}(r^{p|-1})^3+\frac{s^{5|-1}}{1^{5|1}}(r^{p|-1})^5\Big](rn-5p)^{(s-5)p|-1}$$

u. s. w. Demnach ist die gesuchte Gruppen-Anzahl

$$9.\quad A=B-C+D-E+F-\ldots\ldots,\ \text{oder}$$

$$10.\quad A=\ s\cdot m\cdot r^{p|-1}(rn-p)^{(s-1)p|-1}$$

$$-\frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}[m\cdot r^{2p|-1}+m^{2|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}](rn-2p)^{(s-2)p|-1}$$

$$+\frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}[m\cdot r^{3p|-1}+3m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}+m^{3|-1}(r^{p|-1})^3](rn-3p)^{(s-3)p|-1}$$

. . . .

Wird durch die Zahl aller Gruppen dividirt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$11.\quad w=\frac{s\cdot m\cdot r^{p-1}}{(rn)^{p|-1}}-\frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}(rn)^{2p|-1}}[m\cdot r^{2p|-1}+m^{2|-1}(r^{p|-1})^2]$$

$$+\frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}(rn)^{3p|-1}}[m\cdot r^{3p|-1}+3m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}+m^{3|-1}(r^{p|-1})^3]$$

. . . .

Wird in der Gleichung (11.) $m=n$ gesetzt, so beantwortet sie folgende Aufgabe.

In einer Urne befindet sich s verschiedene Arten von Kugeln, von welchen jede m Kugeln zählt, die mit 1, 2, 3, ... m bezeichnet sind. p Kugeln werden einzeln hintereinander herausgenommen und die gezogene Kugel wird nicht in die Urne zurückgelegt. Dies Verfahren wird $s$mal wiederholt: wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs in irgend p zusammengehörigen, hintereinander folgenden Ziehungen lauter Kugeln erscheinen werden, die das gleiche Zeichen haben?

Durch Einführung des angezeigten Werths findet sich aus (11.)

$$12.\quad w=\frac{s\cdot m\cdot r^{p|-1}}{(rm)^{p|-1}}-\frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}(rm)^{2p|-1}}[m\cdot r^{2p|-1}+m^{2|-1}(r^{p|-1})^2]$$

$$+\frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}(rm)^{3p|-1}}[m\cdot r^{3p|-1}+3m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}+m^{3|-1}(r^{p|-1})^3]$$

. . . .

Ist $m=1$, so sollen unter den angegebenen Bedingungen nur Kugeln von einem bestimmten Zeichen erscheinen. Es verschwinden also dann alle Glieder, welche höhere Facultäten von m als die erste enthalten und die Wahrscheinlichkeit ist aus (11.):

$$13. \quad w = \frac{s\cdot r^{p|-1}}{(rn)^{p|-1}} - \frac{s^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}}{1^{2|1}(rn)^{2p|-1}} + \frac{s^{3|-1}\cdot r^{3p|-1}}{1^{3|1}(rn)^{3p|-1}} - \frac{s^{4|-1}\cdot r^{4p|-1}}{1^{4|1}(rn)^{4p|-1}} \cdot$$

Für $k=2$ ist

$$14. \quad w = \frac{2s\cdot r^{p|-1}}{(rn)^{p|-1}} - \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}(rn)^{2p|-1}}[2r^{2p|-1} + 2(r^{p|-1})^2]$$

$$+ \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}(rn)^{3p|-1}}[2r^{3p|-1} + 6r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}]$$

. . . .

In (§. 25.) wurde eine der gegenwärtigen ähnliche Frage beantwortet. Die hier gefundenen Resultate unterscheiden sich von den dortigen dadurch, dafs hier Kugeln mit mehreren Zeichen erscheinen können, dort nur mit einem, und dafs hier Kugeln mit demselben Zeichen schon vor der auflösenden Gruppe erschienen sein können, dort nicht.

Behält man die Bezeichnungsart wie (§. 26. u. ff.) bei, so ergiebt sich für die Anzahl derjenigen Gruppen, in welchen lauter gleichbezeichnete Kugeln in p Ziehungen wenigstens $t$mal und höchstens $x$mal erscheinen, wenn m verschiedene Zeichen in Betrachtung kommen und s Ziehungsreihen gemacht werden:

$$15. \quad A_p^{t,x} = A_p^t - A_p^{x+1}.$$

Demnach ist die Reihe (9.) mit dem $t$ten Gliede zu beginnen und die vom $(x+1)$ten Gliede an abzuziehen. Die Zahl der Gruppen, in welchen unter den eben angegebenen Bedingungen lauter gleichbezeichnete Kugeln gerade $t$mal, nicht mehr und nicht weniger oft, erscheinen werden, ist

$$16. \quad A_p^{t,t+1} = A_p^t - A_p^{t+1}.$$

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind

$$17. \quad w = \frac{A_p^t - A_p^{x+1}}{(rn)^{sp|-1}},$$

$$18. \quad w = \frac{A^t - A^{t+1}}{(rn)^{sp|-1}},$$

Diese Reihen brechen in bestimmten Fällen bald ab, wie sich aus den Gleichungen (19. und 20. §. 27.) ergiebt, und führen oft zu ganz kurzen Ausdrücken.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist aus (17.)

$$19. \qquad w = 1 - \frac{A^t_p - A^{x+1}_p}{(rn)^{sp-1}}.$$

§. 33.

Jemand trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bezeichnet wird, in p Versuchen so oft herbeizuführen, dafs es immer $r$mal öfter als das Gegentheil zutrifft, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit b ausgedrückt wird: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Unternehmen gelingen werde?

Der Unternehmer erreicht seinen Zweck, wenn das ihm günstige Ereignifs in den r ersten Versuchen eintrifft; er erreicht ihn, wenn das ihm günstige Ereignifs $r+1$mal und das ihm ungünstige darunter einmal eintrifft; er erreicht ihn, wenn das ihm günstige Ereignifs $r+2$mal und darunter das ihm ungünstige zweimal eintrifft u. s. w. Dies giebt folgende Zusammenstellung:

$$a^r,\ a^{r+1}b,\ a^{r+2}b^2,\ a^{r+3}b^3,\ a^{r+4}b^4,\ \ldots\ a^{r+\frac{1}{2}(p-r)}b^{\frac{1}{2}(p-r)},$$

wo die Exponenten von a und b das wiederholte Eintreffen der bezüglichen Ereignisse bezeichnen. Die einzelnen Fälle werden in ihrer Verbindung untereinander besondere Gruppen bilden, deren Anzahl zu suchen ist. $\frac{1}{2}(p-r)$ wird immer eine ganze Zahl sein.

a. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal hintereinander in r Versuchen eintreffen werde, ist a^r.

b. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r+1$mal und das ungünstige einmal in $r+2$ Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das ungünstige Ereignifs in den ersten r Versuchen eintreten werde. Das Eintreten dieses Ereignisses in einem der zwei letzten Versuche ist schon in (*a.*) vorgesehen. Berücksichtigt man (§. 41. m. Comb. Lehre), so ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall:

$$w_1 = r a^{r+1} b.$$

c. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r+2$mal und das ungünstige zweimal in $r+4$ Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das ungünstige Ereignifs in den ersten r Versuchen wenigstens einmal und, wenn es später (einmal höchstens) eintritt, nicht später als im $(r+2)$ten Versuche eintreten werde. Untersucht man die dem Ereignifs günstigen Fälle, so ergiebt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$w_2 = \left[\frac{r(r-1)}{1\cdot 2} + 2\cdot r\right] a^{r+2} b^2 = \frac{r(r+3)}{1\cdot 2}\cdot a^{r+2} b^2.$$

d. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r+3$mal und das ungünstige dreimal in $r+6$ Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das ungünstige Ereignifs in den ersten r Versuchen wenigstens einmal und, wenn es später (zweimal höchstens) eintritt, nicht später als im $(r+4)$ten Versuche eintreten werde. Untersucht man die dem Ereignisse günstigen Fälle, so ergiebt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$w_3 = \left[\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot2\cdot3} + 4\cdot\frac{r(r-1)}{1\cdot2} + \left(\frac{4\cdot3}{1\cdot2}-1\right)r\right]a^{r+3}b^3 = \frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}\cdot a^{r+3}b^3.$$

e. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r+4$mal und das ungünstige viermal in $r+8$ Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das ungünstige Ereignifs in den r ersten Versuchen wenigstens einmal und, wenn es später (dreimal höchstens) eintritt, nicht später als im $(r+6)$ten Versuche eintreten werde. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$w_4 = \left[\frac{r^{4|-1}}{1^{4|1}} + 6\cdot\frac{r^{3|-1}}{1^{3|1}} + \left(\frac{6\cdot5}{1\cdot2}-1\right)\frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}} + \left(\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}-6\right)r\right]a^{r+4}b^4$$
$$= \frac{r(r+5)(r+6)(r+7)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot a^{r+4}b^4$$

u. s. w. Das Fortschreitungsgesetz ist leicht erkennbar. Man erhält für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgenden Ausdruck durch Vereinigung der eben angegebenen Fälle:

$$1.\quad w = a^r\left[1 + rab + \frac{r(r+3)}{1\cdot2}(ab)^2 + \frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}(ab)^3 + \dots\right.$$
$$\left.\dots + \frac{r(r+m+1)(r+m+2)\dots(r+2m-1)}{1\cdot2\cdot3\dots m}(ab)^m + \dots\right].$$

m kann sich bis zu $\frac{1}{2}(p-r)$ erheben.

Setzt man in (1.) $a=b=\frac{1}{2}$ und multiplicirt den Ausdruck mit 2^p, so giebt die Gleichung die Anzahl derjenigen Gruppen, in welchen ein bestimmtes Element immer $r$mal mehr, unmittelbar hintereinander oder im Überschusse über das zweite erscheint, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus zwei Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden. Es ist

$$2.\quad A = 2^{p-r} + r\cdot2^{p-r-2} + \frac{r(r+3)}{1\cdot2}\cdot2^{p-r-4} + \frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}\cdot2^{p-r-6} + \dots$$

Setzt man aber in (1.) $a=\frac{1}{m}$ und $b=\frac{m-1}{m}$ und multiplicirt mit m^p, so ergiebt

$$3.\quad A =$$
$$m^{p-r} + \frac{r}{1}(m-1)m^{p-r-2} + \frac{r(r+3)}{1\cdot2}(m-1)^2m^{p-r-4} + \frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}(m-1)^3m^{p-r-6} + \dots$$

Diese Gleichung bestimmt die Anzahl der Gruppen, in welchen ein bestimmtes Element $r$mal so oft, entweder unmittelbar hintereinander oder im Überschufs über die übrigen Elemente, welche einzeln oder in beliebiger Verbindung untereinander auftreten, erscheinen wird, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe gebildet und die Gruppen von einer bestimmten Richtung aus betrachtet werden.

A trachtet ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bedingt ist, in p Versuchen so oft herbeizuführen, dafs es $r$mal öfter eintrifft, als B und C vereint im Stande sind, gleichheitlich unter sich die ihnen günstigen Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten b und c herbeizuführen: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs A seinen Zweck erreichen werde.

A wird seinen Zweck erreichen, wenn das ihm günstige Ereignifs $r$mal hintereinander in den r ersten Versuchen eintritt, oder wenn das ihm günstige Ereignifs $r+2$mal und das jedem seiner Gegner günstige Ereignifs je einmal, oder wenn das ihm günstige $r+4$mal und das jedem seiner Gegner günstige je zweimal eintritt u. s. w. Dies führt zu folgender Zusammenstellung:

$$a^r, \quad a^{r+2} b c, \quad a^{r+4} b^2 c^2, \quad a^{r+6} a^3 b^3.$$

Untersuchen wir nun die einzelnen Fälle nach den Bemerkungen in $(a, b, c, \ldots.)$ und berücksichtigen, dafs die durch b und c bezeichneten Ereignisse in jeder beliebigen Zusammenstellung unter sich bei den möglichen Versuchen mit dem für A günstigen Ereignisse in Verbindung treten können, so ergiebt sich folgender leicht zu rechtfertigende Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$4. \quad w = a^r \Big[1 + \frac{r(r+3)}{1\cdot 1} \cdot a^2 b c + \frac{r(r+5)(r+6)(r+7)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} \cdot a^4 b^2 c^2 + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{r(r+2m+1)^{2m-1|1}}{1^{m|1}\cdot 1^{m|1}} \cdot a^{2m} b^m c^m + \ldots. \Big].$$

Auf ganz gleiche Weise findet sich die Wahrscheinlichkeit für B, gegenüber von A und C; eben so die für C, gegenüber von A und C.

Diese Schlüsse lassen sich wieder leicht verallgemeinern. Trachtet A_0, mit der ihm günstigen Wahrscheinlichkeit a, gegen n Theilnehmer A_1, A_2, A_3, ... A_n, denen die Wahrscheinlichkeiten a_1, a_2, ... a_n zugehören, ein Ereignifs so oft herbeizuführen, dafs es $r$mal öfter eintrifft, als seine Gegner im Stande sind, gleichheitlich die ihnen günstigen Ereignisse zu erlangen, so ist die Wahrscheinlichkeit für A:

$$5.\quad w = a^r\Big[1 + \frac{r(r+n+1)^{n-1|1}}{(1^{1|1})^n}\cdot a^n\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$$
$$+ \frac{r(r+2n+1)^{2n-1|1}}{(1^{2|1})^2}\cdot a^{2n}(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n)^2$$
$$+ r(r+3n+1)^{3n-1|1}\cdot a^{3n}(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big].$$

Die Reihe bricht ab, wenn die Zahl der Versuche, welche der Eigenthümlichkeit der Aufgabe entsprechen, erschöpft ist. Auf ähnliche Weise wird die für jeden andern Theilnehmer gültige Wahrscheinlichkeit bestimmt.

§. 34.

A trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bezeichnet wird, in p Versuchen wenigstens $r$mal eher, entweder hintereinander, oder im Überschusse über das Gegentheil, herbeizuführen, als *B* im Stande ist, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit b angedeutet wird, $s$mal, entweder hintereinander, oder im Überschusse über das erste Ereignifs zu erlangen: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für *A*?

Durch die in (1. §. 33.) aufgestellte Reihe ist die Beantwortung dieser Frage vorbereitet. Jene Reihe bleibt nämlich so lange in Kraft, als die Potenzen von a und b sich nicht bis zur $s$ten erheben. Erheben sie sich bis zur $s$ten, und darüber, so werden Fälle vorkommen, die *gegen* das Unternehmen entscheiden. Diese müssen gesucht und ausgeschieden werden. Um einen bessern Überblick zu haben, bezeichnen wir die den Potenzen von ab vorausgehenden Vorzahlen in (1. §. 33.) der Reihe nach durch A_0, A_1, A_2, ... Dieses giebt

$$1.\quad w = a^r[A_0 + A_1 ab + A_2(ab)^2 + A_3(ab)^3 + \ldots + A_{s-1}(ab)^{s-1}$$
$$+ A_s(ab)^s + A_{s+1}(ab)^{s+1} + A_{s+2}(ab)^{s+2} + \ldots].$$

Die Glieder der ersten Horizontalreihe in (1.) entscheiden sämmtlich *für A*, die der zweiten enthalten Fälle, welche *gegen A* entscheiden. Der erste Ausdruck in der zweiten horizontalen Reihe bietet nur einen Fall dar, welcher zum Nachtheil des Unternehmens entscheidet. Dieser tritt ein, wenn das ungünstige Ereignifs $s$mal hintereinander vom ersten Versuche an eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit, dafs dies geschehe, ist

$$w_1 = b^s a^r a^s = b^s a^{r+s}.$$

Der zweite Ausdruck der zweiten horizontalen Reihe hat die Form

$$a^{r+s+1}b^{s+1} = a^{r+s}b^s \cdot ab.$$

Man löse, um die Zahl der auszuscheidenden Fälle zu finden, den Ausdruck in seine Bestandtheile auf und zeige die Wiederholungen durch unten angehängte Zahlen statt durch Exponenten an, so dafs

$$a^{r+s+1}b^{s+1} = b_1 b_2 b_3 \ldots . b_{s-1} b_s a_1 a_2 \ldots . a_s a_1 a_2 \ldots . a_r ab$$

wird. Alle die Fälle werden zum Nachtheil des Unternehmens entscheiden, worin b von vorn herein $s$mal hintereinander zu stehen kommt. Dies geschieht so oft, als b zwischen a^{r+s} verschiedene Stellungen einnehmen kann, also $r+s$mal; denn diejenigen Fälle sind auszuschliefsen, in welchen b die letzte oder vorletzte Stelle annimmt, weil sie schon in dem vorhergehenden Falle vorgesehen sind.

Hat b alle Stellen durchlaufen, so reiht es sich an die b an. Dadurch erscheinen diese in der $(s+1)$ten Dimension. Demnach kann ein a auf s Stellen zwischen den b erscheinen. Dies wird durch

$$a^{r+s+1}b^{s+1} = b_1 b_2 b_3 \ldots . b_{s-1} a b_s b . a^s a^r$$
$$b_1 b_2 b_3 \ldots . a b_{s-1} b_s b . a^s a^r$$

ausgedrückt; woraus ein Ausscheiden von noch weitern s Fällen entsteht. Der nach diesen Bemerkungen auszuscheidende Ausdruck ist

$$w_2 = (r+2s) a^{r+s+1} b^{s+1}.$$

Um die Zahl der Fälle, welche der dritte Ausdruck in der zweiten horizontalen Reihe auszuscheiden veranlafst, zu finden, dient folgende Zerlegung:

$$a^{r+s+2}b^{s+2} = b_1 b_2 \ldots . b_s a_1 a_2 \ldots . a_s a_1 a_2 \ldots . a_r a a b b.$$

Die Anwendung der in (c. §. 33.) gemachten Bemerkungen führt auch hier zum Ziel. Die beiden am Ende des Ausdrucks erscheinenden b nehmen von der $(r+2s)$ten Stelle an alle Stellungen zwischen den a ein. Haben sie sich an die ersten b angeschlossen, so treten zwei a ein und wiederholen das Gleiche. Die Zahl der hieraus sich ergebenden Fälle ist

$$\frac{(r+2s)(r+2s-1)}{1 \cdot 2}.$$

Aufserdem kann noch ein b an die $(r+2s+1)$te und $(r+2s+2)$te Stelle rücken. Während nun dieses Element die beiden Stellen annimmt, durchläuft zuerst ein b $r+s$ und ein a darauf s Stellen. Die Zahl dieser Fälle ist

$$2(r+s).$$

Hieraus ergiebt sich für den auszuscheidenden Ausdruck:

$$w_3 = \frac{(r+2s)(r+2s+3)}{1 \cdot 2} \cdot a^{r+s+2} b^{s+2}.$$

Wenden wir die in (*d.* §. 33.) gemachten Bemerkungen auf den vierten Ausdruck in der zweiten horizontalen Reihe an, so ergiebt sich folgende Formel:

$$w_4 = \frac{(r+2s)(r+2s+4)(r+2s+5)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot a^{r+s+3}\, b^{s+3}$$

u. s. w. Die Verbindung dieser Ausdrücke führt zu folgender Formel:

$$2.\quad w_5 = a^{r+s} b^s \Big[1 + \frac{r+2s}{1}\cdot ab + \frac{(r+2s)(r+2s+3)}{1\cdot 2}(ab)^2 + \frac{(r+2s)(r+2s+4)(r+2s+5)}{1\cdot 2\cdot 3}(ab)^3 + \frac{(r+2s)(r+2s+5)(r+2s+6)(r+2s+7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(ab)^4 \;\ldots\ldots$$

Auch hier bezeichnen wir die Vorzahlen auf einfachere Weise und setzen für sie der Reihe nach B_0, B_1, B_2, B_3, ... Dadurch geht der Ausdruck in folgenden über:

$$3.\quad w_5 = a^{r+r} b^s (B_0 + B_1 ab + B_2 (ab)^2 + B_3 (ab)^3 + \ldots + B_{r-1}(ab)^{r-1} + B_r (ab)^r + B_{r+1}(ab)^{r+1} + B_{r+2}(ab)^{r+2} + \ldots).$$

Die Glieder dieser Reihe liefern so lange ein richtiges Resultat, als sich die Exponenten von ab nicht bis zu r erheben. Erheben sie sich bis zu r, und darüber, so entstehen Fälle, welche *für A* entscheiden, während sie, als *gegen A* entscheidend, aufgeführt und ausgeschieden wurden. Sie müssen gesucht, zusammengezählt und von (2.) ausgeschieden werden. Wenden wir die Schlüsse, welche zu (2.) und in (*a, b, c, d,* .... §. 33.) gemacht wurden, auf die Glieder der zweiten horizontalen Reihe in (3.) an, so giebt der erste Ausdruck derselben folgende Ausscheidung:

$$w_1 = a^{2r+s} b^{r+s},$$

der zweite folgende:

$$w_2 = \frac{3r+2s}{1} \cdot a^{2r+s+1} b^{r+s+1},$$

der dritte folgende:

$$w_3 = \frac{(3r+2s)(3r+2s+3)}{1\cdot 2} \cdot a^{2r+s+2} b^{r+s+2}$$

u. s. w. Dies giebt:

$$4.\quad w_4 = a^{2r+s} b^{r+s} \Big(1 + (3r+2s)ab + \frac{(3r+2s)(3r+2s+3)}{1\cdot 2}(ab)^2 + \frac{(3r+2s)(3r+2s+4)(3r+2s+5)}{1\cdot 2\cdot 3}(ab)^3 \;\ldots\ldots\Big).$$

Auch diese Reihe giebt so lange ein günstiges Resultat, als sich die Exponenten von ab nicht bis zu s erheben. Erheben sie sich bis dahin, und darüber, so fängt eine neue Ausscheidung an, welche auf gleiche Weise behandelt werden muſs. Sie giebt folgendes Resultat:

$$5.\quad w_t = a^{2r+2s} b^{r+2s}\left(1+(3r+4s)ab+\frac{(3r+4s)(3r+4s+3)}{1\cdot 2}(ab)^2+\ldots\right).$$

Das Gesetz, nach welchem diese Entwicklungen fortschreiten, ist deutlich. Wählen wir der Kürze wegen für das Gesetz, welches den Reihen (1. 2. 4. und 5.) zum Grunde liegt, die Bezeichnung

$$6.\quad a^{mr+ns} b^{(m-1)r+ns} Q_{(2m-1)r+2ns,\,ab} =$$

$$a^{mr+ns} b^{(m-1)r+ns}\Big((1+((2m-1)r+2ns)ab+\frac{((2m-1)r+2ns)((2m-1)r+2ns+3)}{1\cdot 2}ab$$

$$+\frac{((2m-1)r+2ns)((2m-1)r+2ns+4)((2m-1)r+2ns+5)}{1\cdot 2\cdot 3}(ab)^2$$

. . . .

so ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$7.\quad w = a^r Q_{r,ab} - a^{r+s} b^s Q_{r+2s,ab} + a^{2r+s} b^{r+s} Q_{3r+2s,ab} - a^{2r+2s} b^{r+2s} Q_{3r+2s,ab} + \ldots.$$

Diese Gleichung findet sich leicht aus (6.), wenn man der Reihe nach $m = 1, 2, 3, \ldots$ und $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, aber abwechselnd (zuerst für m, dann für n u. s. w.) in (6.) setzt. Aus (7.) findet sich die Wahrscheinlichkeit für B sehr leicht, wenn das entgegengesetzte Ereigniſs $s$mal eher herbeigeführt werden soll, als A im Stande ist das für ihn günstige Ereigniſs $r$mal zu erlangen. Zu diesem Ende ist b statt a, und s statt r zu setzen. Es ergiebt sich aus (6.)

$$8.\quad w = b^s Q_{s,ab} - b^{s+r} a^r Q_{s+2r,ab} + b^{2s+r} a^{s+r} Q_{3s+2r,ab} - b^{2s+2r} a^{s+2r} Q_{3s+4r,ab} + \ldots.$$

Die hier gefundenen Resultate bereiten auch die Beantwortung folgender Frage vor. A will ein Ereigniſs mit der ihm günstigen Wahrscheinlichkeit a $r$mal eher herbeiführen als B ein Ereigniſs mit der ihm günstigen Wahrscheinlichkeit b $s$mal herbeizuführen im Stande ist. B will das ihm günstige Ereigniſs $s$mal eher herbeiführen als A im Stande ist das ihm günstige $r$mal herbeizuführen: wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs in p Versuchen A oder B seinen Zweck erreichen werde?

In (7.) ist die für A, in (8.) die für B günstige Wahrscheinlichkeit ausgedrückt. Tritt einer der in beiden Gleichungen vorgesehenen Fälle ein, so sind die Versuche geendet. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$9.\quad w = a^r Q_{r,ab} - a^{r+s} b^s Q_{r+2s,ab} + a^{2r+s} b^{r+s} Q_{3r+2s,ab} - \ldots$$
$$+ b^s Q_{s,ab} - b^{s+r} a^r Q_{s+2r,ab} + b^{2s+r} a^{s+r} Q_{3s+2r,ab} - \ldots$$

Diese Aufgabe kann auch unter folgender Form dargestellt werden.

Zwei Spieler A und B, von welchen der erste s, der zweite r Marken hat, spielen unter der Bedingung, dafs derjenige, der ein Spiel verliert, seinem Gegner eine Marke geben mufs und dafs derjenige der Sieger ist, der alle Marken des Gegners gewonnen hat. Die ihnen zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, im einzelnen Falle zu gewinnen, sind a und b: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel in p Versuchen geendet sein werde?

Ist in (7. 8. und 9.) $r=s$, so ergeben sich einfachere Ausdrücke. Aus (9.) wird in diesem Falle, in entwickelter Form:

$$10.\quad w = (a^r+b^r)\left[1+rab+\frac{r(r+3)}{1\cdot2}(ab)^2+\frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}(ab)^3+\dots\right]$$
$$-(a^r+b^r)(ab)^r\left[1+3rab+\frac{3r(3r+3)}{1\cdot2}(ab)^2+\frac{3r(3r+4)(3r+5)}{1\cdot2\cdot3}(ab)^3+\dots\right]$$
$$+(a^r+b^r)(ab)^{2r}\left[1+5rab+\frac{5r(5r+3)}{1\cdot2}(ab)^2+\frac{5r(5r+4)(5r+5)}{1\cdot2\cdot3}(ab)^3+\dots\right]$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Sind auch die Wahrscheinlichkeiten im einzelnen Falle gleich und ist $a=b=\frac{1}{2}$, so ergiebt sich aus (10.)

$$11.\quad w = \frac{1}{2^{r-1}}\left[1+\frac{r}{2^2}+\frac{r(r+3)}{1\cdot2\cdot2^4}+\frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3\cdot2^6}+\dots\right]$$
$$-\frac{1}{2^{3r-1}}\left[1+\frac{3r}{2^2}+\frac{3r(3r+3)}{1\cdot2\cdot2^4}+\frac{3r(3r+4)(3r+5)}{1\cdot2\cdot3\cdot2^6}+\dots\right]$$
$$+\frac{1}{2^{5r-1}}\left[1+\frac{5r}{2^2}+\frac{5r(5r+3)}{1\cdot2\cdot2^4}+\frac{5r(5r+4)(5r+5)}{1\cdot2\cdot3\cdot2^6}+\dots\right]$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Setzt man in der Gleichung (7.) $a=\frac{1}{m}$ und $b=\frac{m-1}{m}$ und multiplicirt mit m^p, so ergiebt sich

$$12.\quad A = m^{p-r}+r(m-1)m^{p-r-2}+\frac{r(r+3)}{1\cdot2}(m-1)^2m^{p-r-4}+\dots$$
$$-(m-1)^s m^{p-r-2s}-\frac{r+2s}{1}(m-1)^{s+1}m^{p-r-2s-2}$$
$$-\frac{(r+2s)(r+2s+3)}{1\cdot2}(m-1)^{s+2}m^{p-r-2s-4}-\dots$$
$$+(m-1)^{r+s}m^{p-3r-2s}+\frac{3r+2s}{1}(m-1)^{r+s+1}m^{p-3r-2s-2}$$
$$+\frac{(3r+2s)(3r+2s+3)}{1\cdot2}(m-1)^{r+s+2}m^{p-3r-2s-4}+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Diese Gleichung löset folgende Aufgabe aus der Lehre von den Combinationen.

Bildet man die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe, verfolgt ein bestimmtes Element nach einer bestimmten Richtung hin, in allen Gruppen, in welchen es vorkommt, und zählt von der ersten Stelle an, wie oft es hintereinander oder im Überschusse über die übrigen Elemente (diese mögen einzeln, wiederholt oder zusammen in willkürlicher Verbindung mit einander stehen) vorkommt: so giebt die Gleichung (12.) die Anzahl der Gruppen an, in welchen das genannte Element wenigstens $r$mal eher vorkommt, als die übrigen (einzeln oder in Verbindung miteinander) $s$mal hintereinander oder im Überschusse über das bestimmte Element vorkommen. Hiebei ist zu bemerken, dafs die Stellenzahl eines Elements immer nur als Einheit gezählt wird. Die Gleichung (12.) und die Gleichungen (2. und 3. §. 33.) geben die Gruppen-Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen von bestimmten Unterschieden, worauf ich in meiner Lehre von den Combinationen hingewiesen habe (§. 23.). Die hier gegebenen Bestimmungen sollen das dort Angedeutete ergänzen.

Die in diesem und dem vorigen Paragraph behandelten Aufgaben stehen untereinander in genauem Zusammenhang. Die Verschiedenheit der Bedeutung der Gleichung (7.) und der Gleichung (1.) im vorigen Paragraph, zeigt sich deutlich und ist leicht zu erkennen. Bringen wir sie, um die Verschiedenheit stärker hervorzuheben, auf die Form, in welcher sie nach (10.) in diesem Paragraph dargestellt wurde, so ist die Aufgabe folgende.

Zwei Personen A und B spielen mit den beziehlichen Wahrscheinlichkeiten a und b, im einzelnen Falle zu gewinnen, miteinander. A hat eine unbestimmte Zahl von Marken, B hat r Marken. Wer verliert, giebt seinem Gegner eine Marke. A gewinnt, wenn er in p Spielen alle Marken seines Gegners erhalten hat: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs A in p Spielen die Marken seines Gegners gewonnen haben werde?

Die Bedingung, dafs A eine unbestimmte oder unerschöpfliche Anzahl Marken habe, ist unerläfslich. Denn hätte er eine bestimmte Anzahl, etwa 5 Marken, so könnte leicht in p Spielen der Fall eintreten, dafs A alle seine Marken verlöre, wodurch er dann aufser Stand gesetzt wäre, das Spiel fortzusetzen. Von dieser unrichtigen Ansicht ging *Laplace* aus; denn er giebt Pg. 235 seiner „Théor. analyt. d. probl." die Gleichung (1. §. 33.), in der Meinung, dafs sie die Aufgabe auflöse, welche hier durch die Gleichung (7.) in diesem Paragraph gelöset wird. Von der Unhaltbarkeit der von *Laplace* aufgestellten Ansicht kann man sich leicht überzeugen, wenn man einzelne und

ganz einfache Fälle näher untersucht. Sie tritt schon deutlich hervor, wenn man in den genannten Gleichungen z. B. $p = 8$ setzt. Die in (§. 33. und 34.) behandelten Aufgaben wurden auch von *Trembley* in „Commentat. Soc. reg. scient. Götting. ad A. 1793 et 1794. Vol. XII. Pg. 99 sqq." behandelt (1. §. 33. und 7. §. 34.). *Laplace* aber scheint diese Arbeit nicht gekannt oder nicht beachtet zu haben. *Moivre* hat in seinem Werke „Doctr. of Chances III. Ed. Lond. 1756. Probl. 64. Pg. 204" die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit wegen Beendigung der Versuche unter den (§. 34.) angegebenen Bedingungen als Aufgabe aufgestellt und giebt die Gleichung (1. §. 33.) als Antwort auf die Frage, da doch die Gleichung (9. §. 34.) sie beantwortet. Er erhält das nämliche unhaltbare Resultat, welches *Laplace* nach ihm aufstellte.

Überblicken wir nun die in (§. 24 — 34) gefundenen Resultate, so zeigt sich, daſs sie eine Reihe zusammengehöriger Aufgaben lösen. Hiemit ist jedoch die Reihe derselben bei weitem noch nicht geschlossen; sie läſst sich noch um andere vermehren, die wir nicht weiter verfolgen, weil wir es schon in einer besondern Schrift: „Die Reihenfolge der Elemente bei den Versetzungen mit und ohne Wiederholungen aus einer oder mehreren Elementenreihen, und ihre Anwendung auf Wahrscheinlichkeits-Rechnung" gethan haben. Besondere Fälle dieser Aufgaben (§. 26. 29. 30. etc.) wurden von *N. Bernoulli, Moivre, Laplace, Trembley* und von Mehreren in den Annalen von *Gergonne* behandelt; wie wir es am gehörigen Orte angemerkt haben.

IV.

§. 35.

Ist mit dem Eintreffen eines Ereignisses die Erwerbung eines physischen Gutes oder ein Gewinn verbunden, so erhält das Eintreffen einen ***Werth.*** Dieser Werth soll ***Werth der Erwartung*** heifsen.

In einer Urne sind $m-1$ schwarze und eine weifse Kugel enthalten. Auf das Erscheinen der weifsen Kugel ist der Gewinn G gesetzt. Von m Personen darf jede eine Kugel aus der Urne nehmen, ohne die in der Urne enthaltenen Kugeln bei der Ziehung sehen zu können. Diejenige Person, welche die weifse Kugel zieht, erhält die ausgesetzte Summe. Welchen Theil des Gewinnes hat jede Person vor der angefangenen Ziehung anzusprechen, oder wie grofs ist der Werth ihrer Erwartung?

Offenbar hat vor dem Anfange der Ziehung jede Person das gleiche Recht oder den gleichen Anspruch auf den Gewinn. Soll daher vor der Ziehung jeder von ihnen ein bestimmter Theil des ausgesetzten Gewinnes zugewiesen werden, so mufs dieser Theil mit der Gröfse des Anspruchs oder mit der Hoffnung zu gewinnen im Verhältnifs stehen. Dieser Werth der Erwartung ist demnach im vorliegenden Fall

$$E = \frac{1}{m} \cdot G.$$

E bedeutet den Werth der Erwartung. Sind nur zwei Personen A und B vorhanden, von welchen die erste p mal, die andere $m-p$ mal ziehen darf, und ist nun der Werth der Erwartung für beide zu bestimmen, so kann man sich die eine als Stellvertreter von p, die andere als Stellvertreter von $m-p$ Personen vorstellen. Es wird also jede sovielmal den $m$ten Theil des Gewinnes anzusprechen haben, als sie Ziehungen machen darf. Demnach ist der Werth der Erwartung für A,

$$E = \frac{p}{m} \cdot G;$$

der für B,

$$E_2 = \frac{m-p}{m} \cdot G.$$

Dies läfst sich leicht auf drei und mehr Personen ausdehnen. Sind n Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n vorhanden, von welchen die erste p_1, die zweite p_2, die dritte p_3 u. s. w., die $n$te p_n Ziehungen unter den obigen Bedingungen machen darf, so ist der Werth der Erwartung für A_k,

$$1. \quad E_k = \frac{p_k}{m} \cdot G.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dafs $p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_n$ nicht gröfser als m werden darf. In den Gleichungen drückt die Vorzahl von G nach (1. §. 2.) die Wahrscheinlichkeit aus, den in Aussicht stehenden Gewinn zu erhalten. Dies führt zu folgendem Satze:

2. Der Werth der Erwartung einer Person wird bestimmt durch das Product der ihr günstigen Wahrscheinlichkeit in den zu erwartenden Gewinn, oder durch das Product des zu erwartenden Gewinnes in die Hoffnung, ihn zu erlangen.

A hat die Hoffnung, einen der Gewinne G_1, G_2, G_3, ... G_n zu erlangen. Die Wahrscheinlichkeit, den Gewinn G_1 zu erlangen, ist p_1, diejenige den Gewinn G_2 zu erlangen, ist p_2, u. s. w., diejenige den Gewinn G_n zu erlangen, ist p_n. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für A?

Da A nur einen der Gewinne und jeden nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erlangen kann, so findet sich der Werth der Erwartung, wenn man den Grundsatz (2.) auf jeden einzelnen Fall anwendet und die Resultate zusammenzählt. Der gesuchte Werth ist

$$3. \quad E = p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 + \dots + p_n G_n \quad \text{oder}$$

$$4. \quad E = \Sigma_{n=1}^{n=n} p_n G_n,$$

wenn in $p_n G_n$ allmälig, aber gleichzeitig, 1, 2, 3, 4, ... n statt n gesetzt wird. Sind die Wahrscheinlichkeiten, die verschiedenen Gewinne zu erlangen, einander gleich, so dafs $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n = p$, so ist

$$5. \quad E = p(G_1 + G_2 + G_3 \dots + G_n) = p \,.\, \Sigma_{n=1}^{n=n} G_n.$$

Sind die Gewinne gleich und die Wahrscheinlichkeit, sie zu erlangen, ist verschieden, so ist aus (3. und 4.)

$$6. \quad E = (p_1 + p_2 + p_3 \dots p_n) G = G \,.\, \Sigma_{n=1}^{n=n} p_n.$$

In diesen Gleichungen kann $p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_n$ nicht gröfser als die Einheit sein. Für gleiche Gewinne und gleiche Wahrscheinlichkeiten ist

$$7. \quad E = npG.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch noch auf eine andere Art darstellen, wenn nicht die Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, sondern die Zahl der Fälle, welche die verschiedenen Gewinne bringen. Bringen r_1 Fälle den Gewinn G_1, r_2 den Gewinn G_2, u. s. w., r_n Fälle den Gewinn G_n, r_s Fälle aber weder Gewinn noch Verlust, so ist der Werth der Erwartung

$$8. \quad E = \frac{\Sigma_{n=1}^{n=n} r_n G_n}{r_s + \Sigma_{n=1}^{n=n} r_n} = \frac{r_1 G_1 + r_2 G_2 + r_3 G_3 + \ldots . r_n G_n}{r_1 + r_2 + r_3 + \ldots . r_n + r_s}.$$

Wirft Jemand mit einem Würfel einmal, in der Hoffnung sovielmal die Summe G zu treffen, als Puncte auf der obern Seite des geworfenen Würfels erscheinen, so findet sich der Werth der Erwartung aus (5.), wenn $p = \frac{1}{6}$ und $G_1 = G_1$, $G_2 = 2G$, ... $G_6 = 6G$ gesetzt wird. Er ist

$$E = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{42}{2} G = 3\tfrac{1}{2} G.$$

Hat Jemand ein Loos einer aus 1000 Loosen bestehenden Lotterie, in welcher ein Gewinn von 10000 *f*, einer von 5000 *f*, vier von 1000 *f*, vier von 500 *f* und 600 Gewinne von 50 *f* enthalten sind, so ist der Werth seiner Erwartung nach (8.)

$$E = \frac{10000 + 5000 + 4.1000 + 4.500 + 600.50}{1000} f = 51 f.$$

Der *Werth der Erwartung* wird auch mit dem Namen „*mathematische Hoffnung*" bezeichnet und diese der „*moralischen*" gegenübergestellt. Zweckmäfsiger würde der Name „*objective Hoffnung*" sein. Auch liefse sich der Werth der Erwartung durch „*mittlerer Werth*" oder „*Durchschnitts-Werth*" bezeichnen. Für viele Fälle pafst die Benennung *mittlerer Werth* recht gut.

Aus den obigen Grundsätzen läfst sich Folgendes weiter ziehen.

In einer Urne ist eine Anzahl Kugeln enthalten, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... a bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit dem Zeichen 1 zu treffen, ist p_1; diejenige, eine mit dem Zeichen 2 zu treffen, p_2, u. s. w. Mit dem Erscheinen der genannten Kugeln ist der Reihe nach der A_1, A_2, A_3, ... $A_a$fache Gewinn einer bestimmten Summe verbunden. In einer zweiten Urne ist eine andere Zahl von Kugeln enthalten, welche die Zahlen 1, 2, 3, ... b haben. Die Wahrscheinlichkeiten, diese Kugeln zu treffen, sind beziehlich q_1, q_2, q_3, ... q_b, und mit deren Erscheinen sind die B_1, B_2, B_3, ... $B_b$fachen Gewinne derselben Summe verbunden. Jemand zieht nun erst eine Kugel aus der ersten, dann eine aus der zweiten Urne und gewinnt so viel

als die Summe der auf den gezogenen Kugeln aufgezeichneten Zahlen ausdrückt. Wie grofs ist der Werth der Erwartung?

Die Frage beantwortet sich, wenn zunächst der Werth der Erwartung bestimmt wird, der durch das Ziehen einer Kugel aus der ersten Urne bedingt ist; dann derjenige, welcher durch das Ziehen einer Kugel aus der zweiten Urne sich ergiebt. Wird aus der ersten Urne gezogen, so ist der Werth der Erwartung nach (3.)

$$E_1 = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a.$$

Wird aus der zweiten gezogen, so ist

$$E_2 = \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Der gesuchte Werth ist demnach

$$9. \quad E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a + \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Diese Schlufsweise läfst sich unter ähnlichen Bedingungen auf drei, vier u. s. w. und g Urnen ausdehnen. Im letzten Fall ergiebt sich allgemein für den Werth der Erwartung:

$$10. \quad E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a + \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b + \Sigma_{c=1}^{c=c} r_c C_c + \ldots + \Sigma_{g=1}^{g=g} z_g G_g.$$

Die in (9. und 10.) gefundenen Gleichungen bleiben auch noch in Kraft, wenn die Ziehungen aus den verschiedenen Urnen nicht *nach einander*, sondern *gleichzeitig* gemacht werden. Zugleich ist auch leicht zu sehen, dafs sie noch immer gelten, wenn nur eine Urne vorhanden ist und unter den obigen Bedingungen wiederholt aus ihr eine Kugel gezogen und nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt wird. Für diesen Fall werden die Wahrscheinlichkeiten und Gewinne einander gleich. Wird dann $p$mal gezogen, so ist der Werth der Erwartung

$$11. \quad E = p\,\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a.$$

Es sind zwei Urnen vorhanden. Die Bedingungen sind die nämlichen, wie die zu (9.). Jemand zieht aus jeder Urne eine Kugel und gewinnt sovielmal eine bestimmte Summe, als das Product der Zahlen anzeigt, welche auf den erschienenen Kugeln geschrieben sind. Wie grofs ist der Werth seiner Erwartung?

Der Werth der Erwartung, welcher aus dem Erscheinen einer Kugel aus der ersten Urne folgt, ergiebt sich aus (3.). Er ist

$$E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a.$$

Auf jeden der in diesem Ausdrucke begriffenen Fälle kann jede in der zweiten Urne enthaltene, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... b beschriebene Kugel folgen.

Erscheint die Kugel mit dem Zeichen 1, so ist der Werth der Erwartung aus (3. und 1.)

$$E_1 = q_1 B_1 \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha.$$

Erscheint die Kugel mit dem Zeichen 2, so ist der Werth der Erwartung nach (3. und 1.)

$$E_2 = q_2 B_2 \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha$$

u. s. w. Erscheint die Kugel mit dem Zeichen b, so ist der Werth der Erwartung, aus dem nämlichen Grunde,

$$E_b = q_b B_b \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha.$$

Aus der Vereinigung dieser Ausdrücke ergiebt sich der Werth der Erwartung. Er ist

$$12. \quad E = \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha . \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Auch wenn drei und mehr Urnen unter ähnlichen Bedingungen in Betracht kommen, bleibt die eben angegebene Schlufsfolge in Kraft. Bei g Urnen ist der Werth der Erwartung

$$13. \quad E = \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha . \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b . \Sigma_{c=1}^{c=c} r_c C_c \dots . \Sigma_{g=1}^{g=g} z_g G_g.$$

Die gleichen Resultate finden sich, wenn die Ziehungen gleichzeitig geschehen.

Die Resultate können noch mehr verallgemeinert werden, wenn man die Gleichungen (10. und 13.) mit einander verbindet. Der Werth der Erwartung ist dann

$$14. \quad E = F_1 F_2 \dots . F_i + G_1 G_2 G_3 \dots . G_k + \dots . m_1 m_2 \dots . m_r,$$

wenn $F_1, F_2, \dots . F_i$; $G_1, G_2, \dots . G_k$, u. s. w. die Ausdrücke sind, welche durch (13.) angedeutet werden.

Es sind zwei Urnen vorhanden. Jemand zieht unter den obigen Bedingungen eine Kugel; und zwar entweder aus der ersten, oder aus der zweiten Urne. Die der erscheinenden Kugel aufgeschriebene Zahl bestimmt die Gröfse des Gewinnes. Wie grofs ist der Werth der Erwartung?

Wird aus der ersten Urne allein gezogen, so ist der Werth der Erwartung

$$E_1 = \Sigma_{\alpha=1}^{\alpha=a} p_\alpha A_\alpha.$$

Wird aus der zweiten allein gezogen, so ist derselbe

$$E_2 = \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Das Ziehen aus jeder Urne ist gleich möglich. Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel aus der einen oder der andern Urne zu ziehen, ist daher $\frac{1}{2}$. Demnach

ist der gesuchte Werth der Erwartung

$$15.\quad E = \tfrac{1}{2}\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a + \tfrac{1}{2}\Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b.$$

Auch wenn unter ähnlichen Voraussetzungen drei und mehr Urnen vorhanden sind, bleibt die eben gemachte Schlufsfolge in Kraft. Es ist allgemein für m Urnen:

$$16.\quad E = \frac{1}{m}\left(\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a + \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b + \Sigma_{c=1}^{c=c} r_c C_c + \ldots + \Sigma_{m=1}^{m=m} z_m M_m\right).$$

Auch diese Gleichung läfst sich nach dem Vorgange von (4.) verallgemeinern, nämlich zu

$$17.\quad E = \frac{1}{m}(F_1 F_2 \ldots F_i + G_1 G_2 \ldots G_k + \ldots M_1 M_2 \ldots M_r).$$

Sind die Werthe, die dem Eintreffen der einzelnen Fälle zugehören, Functionen irgend einer veränderlichen Gröfse, welche durch

$$f x_1,\ f x_2,\ f x_3,\ \ldots f x_a$$

ausgedrückt werden, so ändert dies an der Schlufsfolge nichts und es ist aus (3.) oder (4.):

$$18.\quad E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a f x_a.$$

Aus (10.) ergiebt sich dann

$$19.\quad E = \Sigma_{a=1}^{a=a} p_a f x_a + \Sigma_{b=1}^{b=b} q_b f y_b + \ldots \Sigma_{g=1}^{g=g} n_g f s_g.$$

Diese Schlüsse lassen sich noch weiter ausdehnen, und gelten auch noch, wenn unter $f x_a$ in (18.) eine zusammengesetzte Function, etwa wie $f x_a = f u_a + f w_a$, verstanden wird. Ferner gelten sie, wenn statt der beziehlichen Wahrscheinlichkeiten die Zahl der Fälle, welche das Erscheinen einer Kugel und des zugehörigen Werthes bedingen, gegeben ist. Sind nun $p_1, p_2, p_3, \ldots p_a$; $q_1, q_2, q_3, \ldots q_b$; u. s. w. die Zahl der Fälle, so ergiebt sich aus (9.):

$$20.\quad E = \frac{\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a A_a}{\Sigma_{a=1}^{a=a} p_a} + \frac{\Sigma_{b=1}^{b=b} q_b B_b}{\Sigma_{b=1}^{b=1} q_b}$$

u. s. w. Hier können die unter ΣA_a und ΣB_b u. s. w. begriffenen Fälle auf jeden möglichen Werth, also auch auf 0 und auf negative Gröfsen deuten. Werden die sich ergebenden Resultate negativ, so deuten sie auf *Verlust.*

In einer Urne sind eine Kugel, mit der Zahl 1, zwei Kugeln mit der Zahl 2, drei mit der Zahl 3, u. s. w., m mit der Zahl m bezeichnet, enthalten. Jemand zieht $p$mal je eine Kugel aus der Urne und legt die gezogene Kugel in die Urne zurück. Er erhält jedesmal so oft die Summe G zum Gewinn,

als es die der erscheinenden Nummer aufgeschriebene Zahl anzeigt. Wie grofs ist der Werth der Erwartung?

Aus (11.) oder (20.) ergiebt sich dieser Werth durch Einführung der angezeigten Werthe. Er ist

$$E = p\cdot\frac{\Sigma m^2}{\Sigma m}\cdot G = \frac{2p}{m(m+1)}[\tfrac{1}{3}m^3+\tfrac{1}{2}m^2+\tfrac{1}{6}m] = \frac{p(2m^2+3m+1)}{3(m+1)};$$

denn es sind in (20.) statt $p_1, p_2, \ldots . p_a$ die Zahlen 1, 2, 3, ... m und statt $A_1, A_2, \ldots . A_a$ dieselben Zahlen zu setzen. Wird bei dem Erscheinen irgend einer Kugel nur der einfache Gewinn ausgezahlt, so ist der Werth der Erwartung unter diesen Bedingungen:

$$E = p\cdot\frac{\Sigma m}{\Sigma m}\cdot G = p.G.$$

Ist aber in der Urne nur eine Kugel mit jedem der Zeichen vorhanden, so ist der Werth der Erwartung

$$E = p\cdot\frac{\Sigma m}{\Sigma_1}\cdot G = p\cdot\frac{m(m+1)}{1.2.m}\cdot G = \tfrac{1}{2}p(m+1)G,$$

Dies ist der Fall bei dem Würfelspiel, wenn $G=1$ gesetzt wird. Es finden sich dann die Durchschnittswerthe, welche bei diesem Spiele mit 1, 2, 3, 4, ... Würfeln geworfen werden können. Dieselben sind der Reihe nach $\tfrac{7}{2}$, 7, $10\tfrac{1}{2}$, 14, $17\tfrac{1}{2}$, 21, $24\tfrac{1}{2}$, 28, $31\tfrac{1}{2}$, 35, ...

In einer Urne befinden sich eine Kugel mit $-m$, eine mit $+m$, zwei mit $-(m-1)$ und zwei mit $+(m-1)$, drei mit $-(m-2)$ und drei mit $+(m-2)$ bezeichnet u. s. w.; endlich $m+1$ Kugeln mit 0 bezeichnet. Man zieht $p$mal. Wie grofs ist der Durchschnittswerth für die den Kugeln aufgeschriebenen Nummern. Aus (20.) ergiebt sich durch Einführung der angezeigten Werthe

$$E = p\cdot\frac{\frac{-m(m+1)}{1.2}+(m+1)0+\frac{m(m+1)}{1.2}}{m(m+1)+m+1} = 0$$

§. 36.

Die im vorigen Paragraph enthaltenen Grundsätze gelten allgemein zur Bestimmung des Werths der Erwartung irgend einer betheiligten Person, und ohne Rücksicht auf die Art und Weise, wie der zu erwartende Gewinn erlangt wird, oder auf die Ordnung, in welcher die Theilnehmer ihre Ansprüche geltend machen können. Es liegt daher die Frage nahe: Hat die Ordnung, in welcher mehrere Personen dazu gelangen, ihre Ansprüche geltend zu machen, einen Einflufs auf den Werth der Erwartung, oder nicht?

Um diese Frage zu untersuchen, gehen wir vom Folgenden aus.

In einer Urne befinden sich $n-1$ schwarze und eine weifse Kugel. Von n Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n nimmt jede in der genannten Ordnung eine Kugel aus der Urne, ohne die Kugeln vorher sehen zu können. Wer die weifse Kugel zieht, gewinnt die darauf gesetzte Summe G. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für die einzelnen Theilnehmer?

Es können folgende Fälle eintreten. Die weifse Kugel wird von A_1, oder von A_2, oder von A_3, ..., oder von A_n gezogen. Für jeden einzelnen Fall mufs der Werth bestimmt und das erhaltene Resultat mit den übrigen verglichen werden. Die Wahrscheinlichkeit, dafs A_1 die weifse Kugel ziehen werde, ist $\frac{1}{n}$. Der Werth der Erwartung für A_1 ist demnach

$$E_1 = \frac{G}{n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs A_2 gerade die weifse Kugel ziehen werde, setzt voraus, dafs A_1 sie nicht, sondern eine schwarze Kugel gezogen habe. Sie ist $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$. Der Werth der Erwartung hierfür ist

$$E_2 = \frac{G}{n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade A_3 die weifse Kugel ziehen werde, setzt voraus, dafs weder A_1 noch A_2 die weifse, sondern eine schwarze Kugel gezogen habe. Sie ist $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$. Der Werth der Erwartung für A_3 ist also

$$E_3 = \frac{G}{n}.$$

Diese Schlüsse lassen sich fortsetzen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs A_k gerade die weifse Kugel ziehen werde, beruht darauf, dafs keiner seiner Vorgänger dieselbe gezogen hat und ist $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$. Der Werth der Erwartung ist also für A_k:

$$1. \quad E_k = \frac{G}{n};$$

u. s. w. Die so eben gefundenen Resultate rechtfertigen demnach folgenden Satz.

2. Soll ein Gewinn G durch Verloosung auf die genannte Weise einer von den Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n zugewiesen werden, so ist der Werth der Erwartung aller Theilnehmer vor dem Beginne der Verloosung *gleich grofs*. Sind aber schon k Kugeln gezogen und ist die fragliche Kugel

noch nicht erschienen, so ist der Werth der Erwartung für den Theilnehmer im Angenblick, wo er zum Loosen gelangt,

$$3.\quad E = \frac{G}{n-k}.$$

An die Stelle der Ordnung, in welcher die genannten Personen zum Loosen gelangen, kann jede andere gesetzt werden, ohne dafs sich die Schlüsse ändern, welche die Resultate (1. und 2.) geben. Dies führt zu folgendem Satze:

4. Soll ein Gewinn G auf die genannte Weise einer von n Personen durch Verloosung zugewiesen werden, so ist die Ordnung, in welcher die Personen zum Loosen gelangen, gleichgültig.

In einer Urne sind $n-2$ schwarze und zwei mit 1 und 2 bezeichnete weifse Kugeln enthalten. Zwei Gewinne G und H sollen unter die Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n durchs Loos vertheilt werden. Wer die Kugel 1 zieht, erhält den Gewinn G und wer die Kugel 2 zieht, den Gewinn H. Die Personen kommen in der genannten Ordnung zum Ziehen. Jede zieht eine Kugel aus der Urne. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für jede Person, vor der Ziehung?

Es können folgende Fälle eintreten:
Die Gewinne fallen in der genannten Ordnung

a) auf die 1te und 2te, 1te und 3te, 1te und 4te, ... 1te und $n$te Person,
b) auf die 2te und 3te, 2te und 4te, 2te und 5te, ... 2te und $n$te Person,
c) auf die 3te und 4te, 3te und 5te, 3te und 6te, ... 3te und $n$te Person,

. . . .

n) auf die $(n-1)$te und $n$te Person.

Die Ordnung, in welcher die Gewinne erscheinen, ist die umgekehrte, und die nämlichen Fälle treten wieder ein.

Die obige Zusammenstellung umfafst alle möglichen Fälle. Sie stimmen mit den Zerstreuungen zweier Elemente in n Fächer überein und sind deshalb ihrer Zahl nach und in einer bestimmten Ordnung, $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$. Jeder Theilnehmer hat die Aussicht, dafs sich in $n-1$ Fällen das Loos günstig für ihn entscheide. Für jeden einzelnen Fall mufs daher der Werth seiner Erwartung bestimmt und alle diese Werthe müssen zusammengezählt werden. Die Wahrscheinlichkeiten in den einzelnen Fällen sind veränderlich, nach der Zahl der in der Urne zurückbleibenden Kugeln und des darauf gesetzten Gewinnes.

Werden nun unter den genannten Voraussetzungen die Werthe der Erwartungen bestimmt, so ergiebt sich für die in (a) aufgeführten Fälle, welche den Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf den Gewinn G andeuten, nach (1. §. 35.) folgende Zusammenstellung:

$$
1.\quad \begin{cases}
\frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\frac{G}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{H}{n-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\frac{G}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{H}{n-3}\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{G}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\ldots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}H = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}.
\end{cases}
$$

Wendet man die nämlichen Bemerkungen auf die unter (b) angeführten Fälle an, so erhält man folgende Darstellung:

$$
2.\quad \begin{cases}
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{G}{n-1}\cdot\frac{H}{n-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{G}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{H}{n-3}\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{G}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{H}{n-4}\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{G}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-3}\cdot\frac{n-4}{n-3}\ldots\ldots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}H = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}.
\end{cases}
$$

Für die unter (c) aufgeführten Fälle ergiebt sich:

$$
3.\quad \begin{cases}
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{G}{n-2}\cdot\frac{H}{n-3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{G}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{H}{n-4}\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{G}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\frac{H}{n-5}\ldots\ldots\ldots = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{G}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\ldots\ldots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}H = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1},
\end{cases}
$$

u. s. w. Für den letzten Fall gilt die Bestimmung

$$
4.\quad \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\ldots\ldots\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}G\cdot H = \frac{G}{n}\cdot\frac{H}{n-1}.
$$

Erscheinen die Gewinne in umgekehrter Ordnung, so treten die unter $(a, b, c, \ldots n)$ aufgeführten Fälle wieder ein. Es ergeben sich die Ausdrücke $(1, 2, 3, 4, \ldots)$; jedoch mit dem Unterschiede, dafs G an die Stelle von H tritt; und umgekehrt.

Die Hoffnung von A_1 auf den Gewinn G ist in (1.) angegeben. $n-1$ Fälle sind für A_1 günstig, die sämmtlich einander gleich sind. Nun bezieht sich der Werth der Erwartung von A_1 offenbar nur auf den Gewinn G, nicht auf H. Also ist letzterer auszuscheiden und das Resultat $(n-1)$mal zu nehmen. Mithin ist der Werth der Erwartung für A_1 auf den Gewinn G:

$$g_1 = \frac{G}{n(n-1)} \cdot (n-1) = \frac{G}{n}.$$

Dies gilt unmittelbar auch für A_1 in Beziehung auf den Gewinn H, und der Werth der Erwartung von A_1 ist in dieser Beziehung:

$$h_1 = \frac{H}{n(n-1)} \cdot (n-1).$$

Der ganze Werth der Erwartung von A_1 ist also

$$5. \quad E_1 = \frac{G}{n} + \frac{H}{n}.$$

Auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich der Werth der Erwartung für A_2. Nach (2.) sind $n-2$ Fälle für A_2 günstig, nach (1.) nur einer. Der Werth der Erwartung von A_2 auf den Gewinn G ist $\frac{G}{n}$ und auf den Gewinn H, $= \frac{H}{n}$, folglich ist der Werth der Erwartung von A_2 in Beziehung auf beide Gewinne:

$$6. \quad E_2 = \frac{G}{n} + \frac{H}{n}.$$

Setzt man auf diese Weise die Schlufsfolge fort, so ist der Werth der Erwartung von A_k in Beziehung auf beide Gewinne:

$$7. \quad E_k = \frac{G}{n} + \frac{H}{n}.$$

Diese Resultate führen zu folgendem Schlusse:

8. Sollen zwei Gewinne G und H unter den oben genannten Bedingungen unter n Theilnehmer, die in einer vorgeschriebenen Ordnung zum Loose gelangen, vertheilt werden, so ist der Werth der Erwartung für jeden Theilnehmer vor dem Beginn der Verloosung gleich grofs.

Geht man von der vorgeschriebenen Ordnung auf eine andere über, so ändert dies nichts in der Schlufsweise, folglich auch nicht das Resultat für den Werth der Erwartung. Dies giebt folgenden Satz:

9. Sollen zwei Gewinne G und H durch das Loos auf die oben angegebene Weise unter n Theilnehmer vertheilt werden, so ist die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, gleichgültig.

Sind k schwarze Kugeln erschienen, also noch $n-k$ Kugeln und die Gewinne in der Urne zurück, so ist der Werth der Erwartung für jeden folgenden Theilnehmer vor der Fortsetzung der Verloosung:

$$10. \quad E = \frac{G}{n-k} + \frac{H}{n-k}.$$

Ist ein Gewinn, etwa G, erschienen, so ist derselbe

$$11. \quad G = \frac{H}{n-k}.$$

In einer Urne befinden sich $n-3$ schwarze und drei mit 1, 2, 3 bezeichnete weifse Kugeln. Drei Gewinne G_1, G_2, G_3 sollen unter die Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n durchs Loos vertheilt werden. Wer die Kugel 1 zieht, erhält den Gewinn G_1; wer die Kugel 2 zieht, erhält G_2; wer die Kugel 3 zieht, erhält G_3. Die Personen kommen in der genannten Ordnung zum Ziehen. Jede nimmt eine Kugel heraus. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für jede Person vor der Ziehung?

Die Gewinne können in folgender Ordnung erscheinen:

$$\begin{array}{ll} G_1, G_2, G_3; & G_2, G_3, G_1, \\ G_1, G_3, G_2; & G_3, G_1, G_2, \\ G_2, G_1, G_3; & G_3, G_2, G_1. \end{array}$$

Für jede Ordnung können folgende Fälle vorkommen: die Gewinne können fallen

a) auf die 1te, 2te u. 3te; 1te, 2te u. 4te; 1te, 2te u. 5te; .... 1te, $(n-1)^{te}$, n^{te} Person,
b) auf die 2te, 3te u. 4te; 2te, 3te u. 5te; 2te, 3te u. 6te; .... 2te, $(n-1)^{te}$, n^{te} Person,
c) auf die 3te, 4te u. 5te; 3te, 4te u. 6te; 3te, 4te u. 7te; .... 3te, $(n-1)^{te}$, n^{te} Person,
. . . .
n) auf die $(n-2)^{te}$, $(n-1)^{te}$, n^{te} Person.

Dieses Schema fällt mit den Zerstreuungen von drei Elementen in n Fächer zusammmen, und gilt für jede einzelne Gewinn-Vertheilung. Demnach ist die Zahl aller möglichen Fälle, welche entstehen,

$$= 1.2.3.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

Unter diesen Fällen kann jeder Theilnehmer $1.2.\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ mal in Beziehung auf jeden einzelnen Gewinn ein für sich günstiges Resultat erwarten.

Wendet man nun die Schlüsse an, welche in (1. 2. 3. ....) angewendet wurden, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$
12. \left\{
\begin{array}{l}
\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2}, \\
\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{G_3}{n-3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2}, \\
\frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{G_3}{n-4} \cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{G_1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-3} \cdots\cdots \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}G_2\cdot G_3 = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},
\end{array}
\right.
$$

$$
13. \left\{
\begin{array}{l}
\frac{n-3}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{G_2}{n-2}\cdot\frac{G_3}{n-3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2}, \\
\frac{n-3}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{G_2}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{G_3}{n-4} \cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2}, \\
\frac{n-3}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{G_2}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\frac{G_3}{n-5} \cdots\cdots\cdots = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{n-3}{n}\cdot\frac{G_1}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-3} \cdots\cdots \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}G_2\cdot G_1 = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},
\end{array}
\right.
$$

u. s. w. Endlich

$$
14. \quad \frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1}\cdot\frac{n-5}{n-2}\cdot\frac{n-6}{n-3} \cdots\cdots \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}G_1\cdot\frac{1}{2}G_2\cdot G_3 = \frac{G_1}{n}\cdot\frac{G_2}{n-1}\cdot\frac{G_3}{n-2},
$$

Wählt man eine andere Ordnung der Gewinne G_1, G_2, G_3, so ist in (12. 13. und 14.) die veränderte Ordnung einzuführen. Die übrigen Gebilde bleiben unverändert.

Um nun den Werth der Erwartung von A_1 in Bezug auf den Gewinn G_1 zu bestimmen, ist zu bemerken, dafs A_1 ihn in $1.2.\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Fällen erhalten kann; in welchen jedoch aufser ihm noch zwei Theilnehmer sich in die Gewinne G_2 und G_3 theilen. Werden diese ausgeschieden, so ergiebt sich

$$g_1 = \frac{G_1}{n}.$$

Auf gleiche Weise findet sich der Werth der Erwartung von A_1 in Beziehung auf die Gewinne G_2 und G_3, nämlich:

$$g_2 = \frac{G_2}{n} \quad \text{und} \quad g_3 = \frac{G_3}{n}.$$

Demnach ist der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf alle die Gewinne:

$$E_1 = \frac{G_1}{n} + \frac{G_2}{n} + \frac{G_3}{n}.$$

Dieses führt zur Bestimmung des Werths der Erwartung für jeden andern Theilnehmer. Es ist also der Werth der Erwartung für den Theilnehmer A_k:

$$15. \quad E_k = \frac{G_1}{n} + \frac{G_2}{n} + \frac{G_3}{n}.$$

Man gelangt demnach sofort zu dem Schlusse, dafs auch in dem vorliegenden Fall der Werth der Erwartung für alle Theilnehmer vor der Verloosung gleich ist. Daran knüpft sich die weitere Bemerkung, dafs auch hier die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, gleichgültig ist.

Die angegebene Entwicklungsweise ist, wie sich aus dem Gesagten leicht ergiebt, allgemein, und bleibt unverändert dieselbe, wenn es auf die Vertheilung von vier und mehreren Gewinnen unter n Personen ankommt.

Sind daher die Gewinne G_1, G_2, G_3, ... G_r unter n Personen auf die obige Art durchs Loos zu vertheilen, und fragt man nach dem Werth der Erwartung für die einzelnen Theilnehmer vor der Verloosung, so ergiebt sich für jeden:

$$16. \quad E = \frac{G_1 + G_2 + G_3 \ldots . G_r}{n};$$

wo r nicht gröfser als n sein kann. In der vorstehenden Gleichung liegt auch folgender Satz.

17. Wenn r Gewinne unter n Personen durchs Loos vertheilt werden sollen, so ist die Ordnung, in welcher die einzelnen Spieler zum Loosen gelangen, ganz gleichgültig. Denn der Werth der Erwartung bleibt nach (16.) unverändert, welche Ordnung auch gewählt werden mag.

Die gleichen Gesetze gelten bei Vertheilung von Lasten durch das Loos. Dies beweiset, dafs das Verfahren, welches gewöhnlich bei Vertheilung von Gewinnen oder Lasten durch das Loos angewendet wird, ganz im Rechte begründet ist. Man ist dabei einem natürlichen Gefühle gefolgt und richtig verfahren, ohne sich der Gründe klar bewufst zu sein: denn die vorstehenden Sätze sind, so viel mir bekannt, noch nirgend mathematisch bewiesen worden. Sie sind aber die Haupt-Grundlage für die Lehre von dem Werthe der Erwartung; denn gerade die Berechnung der durchschnittlichen Werthe von zu hoffenden Gütern gründet sich ganz auf die hier entwickelten Sätze, und es ist nicht möglich, die Gröfse der mathematischen Hoffnung für irgend einen

Theilnehmer zu ermitteln, wenn nicht eine bestimmte Ordnung festgesetzt ist, oder bevor man nicht erwiesen hat, dafs die Ordnung bei der Verloosung gleichgültig ist.

Wenn mehrere der zu vertheilenden Gewinne einander gleich sind, ändern sich die obigen Sätze nicht. Die Gleichung (16.) geht in folgende über:

$$18. \quad E = \frac{p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 \ldots + p_r G_r}{n};$$

wobei die Bedingung $p_1 + p_2 + p_3 \ldots p_r \leqq n$ Statt findet. Sind k Ziehungen gemacht, ohne dafs ein Gewinn erschienen war, so ändert sich natürlich der Werth der Erwartung für die übrigen Theilnehmer und es ist für diesen Fall aus (18.):

$$19. \quad E = \frac{p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 \ldots + p_r G_r}{n - k}.$$

Hier ist $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_r \gtreqless n - k$.

Verschiedene Arten sind denkbar, Gewinne und Lasten durch das Loos zu vertheilen. Wir wollen folgende hervorheben.

a. In eine Urne werden so viele verschiedene Nummern gelegt, als Theilnehmer vorhanden sind: in eine zweite Urne so viele Blättchen oder Zettel, als Gewinne vertheilt werden sollen. Auf jedem Blättchen ist ein bestimmter Gewinn verzeichnet. Ist die Zahl der Gewinne kleiner als die Zahl der Theilnehmer, so werden so viele unbezeichnete oder mit 0 bezeichnete Blättchen (Nieten) hinzugethan, bis die Zahl der Theilnehmer erfüllt ist. Die Blättchen können zur Vorsicht verschlossen in die Urne gethan werden. Darauf wird aus jeder Urne je ein Blättchen gleichzeitig gezogen, die Zahl und der zugehörige Treffer oder die Niete wird gelesen, und so fortgefahren, bis aus beiden Urnen alle Blättchen gezogen sind.

b. Man bezeichnet auf verschiedene Blättchen der Reihe nach die zu vertheilenden Gewinne und legt die Blättchen verschlossen in die Urne, und so viele Nieten hinzu, bis die Zahl der Theilnehmer ergänzt ist. Nun werden der Reihe nach die Nummern, welche die Theilnehmer vertreten, ausgerufen, und bei oder vor jedem Aufrufe wird ein Blättchen aus der Urne gezogen und im letzten Falle geöffnet, wenn die Nummer gerufen ist. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Blättchen gezogen sind.

c. Man bringt in eine Urne, verschlossen, alle Nummern, welche die Theilnehmer vertreten. In eine zweite Urne legt man so viele Blättchen als Gewinne vertheilt werden sollen, mit den darauf verzeichneten Gewinnen; gleich-

falls verschlossen. Nun zieht man aus jeder Urne gleichzeitig ein Blättchen, lieset die Nummer und den dazu gehörigen Gewinn ab, und fährt so fort, bis alle Treffer gezogen sind und dadurch das Loos sämmtlicher Theilnehmer entschieden ist.

d. Man bringt in eine Urne, verschlossen, alle Nummern, welche die Theilnehmer vertreten, ruft in einer bestimmten, oder in jeder beliebigen Ordnung, sämmtliche Treffer aus, und zieht gleichzeitig mit jedem Treffer eine Nummer, wodurch das Loos der Theilnehmer allmälig entschieden wird.

Bei allen diesen Arten wird vorausgesetzt, dafs die in der Urne enthaltenen Blättchen wohl gemengt und bei jeder Ziehung durch einander gerüttelt werden, und dafs natürlich überall rechtlich und gewissenhaft verfahren werde.

Die erste Art schützt wohl am meisten gegen Betrug; besonders wenn gleichzeitig aus beiden Urnen Nummern gezogen werden und die Blättchen verschlossen in der Urne liegen. Diese Methode hat in sich selbst ihre Controle.

Die Rechtlichkeit der drei letzten Methoden gründet sich darauf, dafs bei dem Ziehen der Nummern aus einer Urne (nach der Lehre der Versetzungen, welche hier Anwendung findet) jede Zahl auf jeder einzelnen Stelle gleichvielmal erscheint; wodurch also die Ansprüche eines jeden Theilnehmers gesichert sind. Die beiden letzten Methoden ersparen bei einer grofsen Anzahl von Loosen viel Zeit.

Diese Sätze hier stimmen mit denen (§. 5. und 6.) überein, und die hier und dort gefundenen ergänzen sich gegenseitig; denn mit den dort betrachteten Fällen kann das Vertheilen von Gewinnen und also ein bestimmter Werth der Erwartung verbunden sein.

§. 37.

n Personen A_1, A_2, A_3, ... A_n trachten, in der genannten Reihenfolge und jeder mit einer besondern Wahrscheinlichkeit, ein Ereignifs herbeizuführen, mit dessen Eintreffen ein Gewinn verbunden ist; und zwar A_1 mit der Wahrscheinlichkeit a des Gelingens im einzelnen Fall, des Mifslingens $\alpha = 1 - a$ in q auf einander folgenden Versuchen; A_2 mit einer Wahrscheinlichkeit des Gelingens b im einzelnen Falle und des Mifslingens $\beta = 1 - b$ in r Versuchen, u. s. w., A_n mit einer Wahrscheinlichkeit n des Gelingens und des Mifslingens $\nu = 1 - n$ in z Versuchen. Gewinnt der Theilnehmer A_1 einmal, so erhält er den Gewinn G_1, A_2 den Gewinn G_2, u. s. w., A_n den Ge-

winn G_n. Jeder Theilnehmer tritt $p$mal in die Reihe, wenn nicht durch Erscheinen eines Gewinnes die Versuche beendet werden. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für jeden einzelnen Theilnehmer?

Der Theilnehmer A_1 kann entweder gerade im ersten, oder im zweiten, oder im dritten u. s. w., oder im $q$ten Versuche in der ersten, zweiten, oder dritten u. s. w., oder in der $p$ten Reihenfolge gewinnen. In jedem einzelnen Falle erhält er G_1. Die Möglichkeit gerade im zweiten, dritten Versuche u. s. w., und überhaupt in einem spätern Versuche als dem ersten zu gewinnen, setzt voraus, dafs in keinem der vorhergehenden Versuche ein Gewinn erlangt wurde. Demnach ist der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf die Versuche der ersten Reihenfolge (6. §. 35.):

$$E_{1,1} = (a + \alpha a + \alpha^2 a + \alpha^3 a + \ldots + \alpha^{q-1} a) G_1 = \frac{1-\alpha^q}{1-\alpha} \cdot a G_1 = (1-\alpha^q) G_1.$$

Der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf die Versuche der zweiten Reihenfolge ist

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \alpha^q \beta^r \gamma^s \ldots \nu^z (a + \alpha a + \alpha^2 a + \ldots \alpha^{q-1} a) G_1 \\ &= \alpha^q \beta^r \gamma^s \ldots \nu^z (1-\alpha^q) G_1. \end{aligned}$$

Der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf die Versuche der dritten Reihenfolge ist

$$\begin{aligned} E_{1,3} &= \alpha^{2q} \beta^{2r} \gamma^{2s} \ldots \nu^{2z} (a + \alpha a + \alpha^2 a + \ldots \alpha^{q-1} a) G_1 \\ &= \alpha^{2q} \beta^{2r} \gamma^{2s} \ldots \nu^{2z} (1-\alpha^q) G_1, \end{aligned}$$

u. s. w. Der Werth der Erwartung in Beziehung auf die Versuche der $p$ten Reihenfolge ist

$$\begin{aligned} E_{1,p} &= \alpha^{(p-1)q} \beta^{(p-1)r} \gamma^{(p-1)s} \ldots \nu^{(p-1)z} (a + \alpha a + \alpha^2 a + \ldots \alpha^{q-1} a) G_1 \\ &= (\alpha^q \beta^r \gamma^s \ldots \nu^z)^{p-1} (1-\alpha^q) G_1. \end{aligned}$$

Werden diese Werthe vereinigt, so ergiebt sich für den Werth der Erwartung von A_1 in Beziehung auf sämmtliche Reihenfolgen:

$$1. \quad E_1 = \frac{1-(\alpha^q \beta^r \gamma^s \ldots \nu^z)^p}{1-\alpha^q \beta^r \gamma^s \ldots \nu^z} (1-\alpha^q) G_1.$$

Auf ganz gleiche Weise ergiebt sich der Werth der Erwartung für A_2, wenn man erwägt, dafs q Versuche dem Eintritt in die erste, $2q+r+s+\ldots+z$ Versuche dem in die zweite u. s. w., endlich $pq+(p-1)(r+s+\ldots n)$ dem Eintritt in die $p$te Reihenfolge vorausgegangen sein müssen. Demnach ist der Werth der Erwartung von A_2:

$$2.\quad E_2 = \alpha^q(1-\beta^r)G_2$$
$$+\alpha^{2q}\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z(1-\beta^r)G_2$$
$$+\alpha^{3q}\beta^{2r}\gamma^{2s}\ldots\ldots\nu^{2z}(1-\beta^r)G_2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\alpha^{pq}(\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z)^{p-1}(1-\beta^r)G_2$$
$$= \alpha^q(1-\beta^r)\frac{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z)^p}{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z}\cdot G_2.$$

Setzt man diese Schlufsweise fort, so ergiebt sich für den Werth der Erwartung von A_3:

$$3.\quad E_3 = \alpha^q\beta^r(1-\gamma^s)\frac{1-(\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z)^p}{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z}\cdot G_3,$$

u. s. w. Der für A_n ist

$$4.\quad E_n = \alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\omega^y(1-\nu^z)\frac{1-(\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z)^p}{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z}\cdot G_n.$$

Ist p eine ziemlich grofse Zahl, oder werden die Reihenfolgen ins Unbestimmte fortgeführt, so kann $(\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z)^p$, als sehr klein, vernachlässigt werden. In diesem Fall gehen die Ausdrücke (1. bis 4.) in folgende über:

$$5.\quad \begin{cases} E_1 = (1-\alpha^q)\dfrac{G_1}{1-\alpha^q\beta^r\ldots\ldots\nu^z}, \\ E_2 = \alpha^q(1-\beta^r)\dfrac{G_2}{1-\alpha^q\beta^r\ldots\ldots\nu^z}, \\ E_3 = \alpha^q\beta^r(1-\gamma^s)\dfrac{G_3}{1-\alpha^q\beta^r\ldots\ldots\nu^z}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n = \alpha^q\beta^r\ldots\ldots\omega^y\cdot\dfrac{G_n}{1-\alpha^q\beta^r\gamma^s\ldots\ldots\nu^z}. \end{cases}$$

Vergleicht man die Werthe der Erwartungen für eine beschränkte (1. bis 4.) oder für eine unbeschränkte Reihenfolge (5.) mit einander, so ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$6.\quad E_1 : E_2 : E_3 : \ldots\ldots E_n$$
$$= (1-\alpha^q)G_1 : \alpha^q(1-\beta^r)G_2 : \alpha^q\beta^r(1-\gamma^s)G_3 : \ldots\ldots \alpha^q\beta^r\ldots\ldots\omega^y(1-\nu^z)G_n,$$

und man wird auf ein beständiges Verhältnifs der Werthe der Erwartungen der einzelnen Theilnehmer für beschränkte und unbeschränkte Reihenfolgen geführt.

Sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Theilnehmer, Gewinne und Zahl der Versuche, gleich grofs, so dafs $a = b_1 = c = \ldots\ldots \alpha = \beta = \gamma = \ldots\ldots$ $G = G_1 = G_2 = G_3 \ldots\ldots$ und $q = r = s = \ldots\ldots$ ist, so gehen die Gleichungen (1. bis 4.) in eine andere Form über, die allgemein

$$7.\quad E_k = \alpha^{(k-1)q}(1-\alpha^q)\frac{1-\alpha^{nqp}}{1-\alpha^{nq}}\cdot G$$

ist. Das Verhältnifs der Werthe der Erwartungen für die einzelnen Theilnehmer wird dann

$$8.\quad E_1 : E_2 : E_3 : \ldots\ldots E_n = 1 : \alpha^q : \alpha^{2q} : \alpha^{3q} \ldots\ldots \alpha^{(n-1)q}.$$

Ist $q = 1$, so ergiebt sich aus (7.) die Formel

$$9.\quad E_k = a\alpha^{k-1}\frac{1-\alpha^{np}}{1-\alpha^n}\cdot G.$$

Das Verhältnifs der Werthe der Erwartungen wird dann

$$10.\quad E_1 : E_2 : E_3 : E_4 : \ldots\ldots E_n = 1 : \alpha : \alpha^2 : \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^{n-1}.$$

Diese Werthe stehen zu einander in dem Verhältnisse der Glieder einer geometrischen Proportion, deren erstes Glied die Einheit und deren Exponent die dem Eintreffen des Ereignisses ungünstige Wahrscheinlichkeit ist. Diese Werthe nehmen ab. Die Gleichung (10.) gilt unter der Bedingung, dafs die Wahrscheinlichkeit, im einzelnen Falle zu gewinnen, für jeden Theilnehmer unverändert dieselbe bleibt.

Die Vergleichung der in diesem und dem vorigen Paragraphen erlangten Resultate zeigt, dafs die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, bei den in (10.) ausgedrückten Bedingungen durchaus nicht gleichgültig ist, und dafs die früher eintretenden Theilnehmer vor den später eintretenden im Vortheil sind. Die Sätze (§. 36.) gründen sich darauf, dafs die Wahrscheinlichkeiten der Theilnehmer, wenn sie zum Loosen gelangen, veränderlich sind, während die Wahrscheinlichkeit für den einzelnen Theilnehmer bei (10.) unverändert bleibt.

Die hier gefundenen Resultate lassen sich noch anderweitig untersuchen, und man kann fragen: wie müssen die Wahrscheinlichkeiten, oder wie die Zahl der Versuche, oder wie die ausgesetzten Gewinne beschaffen sein, damit die Werthe der Erwartungen für die einzelnen Theilnehmer *gleich* sind. Läfst man die Zahl der Versuche und die Wahrscheinlichkeiten unverändert und bestimmt die Gröfse der Gewinne, um gleiche Erwartungswerthe zu haben, so ist

$$
11.\quad \begin{cases}
G_2 = \dfrac{1-\alpha^q}{\alpha^q(1-\beta^r)} \cdot G_1, \\
G_3 = \dfrac{1-\beta^r}{\beta^r(1-\gamma^s)} \cdot G_2 = \dfrac{1-\alpha^q}{\alpha^q\beta^r(1-\gamma^s)} \cdot G_1, \\
G_4 = \dfrac{1-\gamma^s}{\gamma^s(1-\delta^t)} \cdot G_3 = \dfrac{1-\beta^r}{\beta^r\gamma^s(1-\delta^t)} \cdot G_2 = \dfrac{1-\alpha^q}{\alpha^q\beta^r\gamma^s(1-\delta^t)} \cdot G_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
G_n = \dfrac{1-\omega^y}{\omega^y(1-\nu^z)} \cdot G_{n-1} = \dots \dfrac{1-\beta^r}{\beta^r\gamma^s\dots\omega^y(1-\nu^z)} = \dfrac{(1-\alpha^q)G_1}{\alpha^q\beta^r\gamma^s\dots\omega^q(1-\nu^z)}.
\end{cases}
$$

Läſst man die Wahrscheinlichkeiten und Gewinne unverändert, so ergeben sich aus (1. bis 4.) folgende Bestimmungen für die Zahl der Versuche, um gleiche Erwartungswerthe zu erlangen:

$$
12.\quad \begin{cases}
r = \dfrac{\log\left(1-\dfrac{(1-\alpha^q)G_1}{\alpha^q G_2}\right)}{\log\beta}, \\
s = \dfrac{\log\left(1-\dfrac{(1-\beta^r)G_2}{\beta^r G_3}\right)}{\log\gamma}, \\
t = \dfrac{\log\left(1-\dfrac{(1-\gamma^s)G_3}{\gamma^s G_4}\right)}{\log\delta}, \\
\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Bleiben die Zahl der Versuche und die Gewinne unverändert, so ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Theilnehmer, um zu gleichen Erwartungswerthen zu gelangen:

$$
13.\quad \beta = \sqrt[r]{\left(\frac{\alpha^q G_2-(1-\alpha^q)G_1}{\alpha^q G_2}\right)},\quad \gamma = \sqrt[s]{\left(\frac{\beta^r G_3-(1-\beta^r)G_2}{\beta^r G_3}\right)},\quad \delta = \left(\sqrt[t]{\frac{\gamma^s G_4-(1-\gamma^s)G_3}{\gamma^s G_4}}\right)
$$

u. s. w. Die Gleichungen (13.) werden einfacher, wenn $G = G_1 = G_2 = G_3 = \dots$ gesetzt wird. Alsdann ist

$$
14.\quad \begin{cases}
\beta = \sqrt[r]{\left(\dfrac{2\alpha^q-1}{\alpha^q}\right)}, \\
\gamma = \sqrt[s]{\left(\dfrac{3\alpha^q-2}{2\alpha^q-1}\right)} = \sqrt[s]{\left(\dfrac{2\beta^r-1}{\beta^r}\right)}, \\
\delta = \sqrt[t]{\left(\dfrac{4\alpha^q-3}{3\alpha^q-2}\right)} = \sqrt[t]{\left(\dfrac{2\gamma^s-1}{\gamma^s}\right)} = \sqrt[t]{\left(\dfrac{3\beta^r-2}{2\beta^r-1}\right)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\nu = \sqrt[z]{\left(\dfrac{n\alpha^q-n+1}{(n-1)\alpha^q-n+2}\right)} = \sqrt[z]{\left(\dfrac{(n-1)\beta^r-n+2}{(n-2)\beta^r-n+3}\right)} = \sqrt[z]{\left(\dfrac{(n-2)\gamma^s-n+3}{(n-3)\gamma^s-n+4}\right)} = \dots
\end{cases}
$$

Wird hier $q = r = s = \ldots = 1$ und $\alpha = \frac{n-1}{n}$ gesetzt, so sind die Wahrscheinlichkeiten $a, b, c, \ldots$, welche den einzelnen Theilnehmern der Reihe nach zugehören, um gleiche Erwartungswerthe zu erlangen:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n-1}, \quad \frac{1}{n-2}, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 1.$$

Dieses Ergebnifs führt auf die Voraussetzungen, von welchen wir in (§. 36.) ausgingen und bestätigt die Richtigkeit der in beiden Paragraphen gefundenen Resultate. Eine diesen Gegenstand näher untersuchende Abhandlung findet sich im 2ten Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königlich-Bairischen Akademie. München 1837.

§. 38.

Das Vertheilen der Gewinne durchs Loos setzt Beiträge der Theilnehmer voraus, aus welchen die Gewinne genommen werden. Die Beiträge, durch welche man das Recht der Theilnahme an der Verloosung erlangt, sind nach der Natur des besondern Falles entweder gleich, oder verschieden: letzteres wenn sie ein Act der Willkür sind; wie bei vielen Spielen. Die Beiträge heifsen ***Einlage,*** oder auch ***Einsatz.***

Die Einlage kann von den Theilnehmern vor der Verloosung erhoben werden, wie bei Lotterien aller Art, bei manchen Glücksspielen u. s. w., oder sie kann auch auf gegenseitige Verabredung bestimmt und erst nach der Entscheidung erhoben werden. Im ersten Falle tritt ein Staat, eine Gesellschaft, oder eine einzelne Person, unter Gewährleistung, den Theilnehmern gegenüber; im zweiten Falle vereinigen sich zwei oder mehrere Personen, unter gegenseitiger Verpflichtung, im Falle des Verlierens die bedungene Summe auszuzahlen; wie bei Wetten, bei Unterhaltungs- und Gesellschaftsspielen u. s. w.

In allen diesen Fällen mufs der Werth der Einlage auf einer richtigen Grundlage beruhen. Dies wird dann der Fall sein, wenn der einzelne Theilnehmer durchschnittlich so viel Gewinn zu hoffen hat, als er beiträgt.

Daraus ergiebt sich folgender hierher gehörige Grundsatz:

1. Die Einlage mufs dem Werthe der Erwartung gleich sein; und umgekehrt.

Bezeichnen wir die Gröfse der Einlage durch B, so läfst sich der Satz durch

$$2. \quad B = E$$

ausdrücken. Wird damit der Satz (2. §. 35.) verbunden, so erhält man

$$3.\quad B = wG = \frac{mG}{q};$$

wo m die Zahl der günstigen und q die aller möglichen Fälle bezeichnet.

Der Werth der Einlage hangt also von dem zu erlangenden Gewinn und der Wahrscheinlichkeit ihn zu treffen ab. Wenden wir jetzt den Satz (3.) auf verschiedene Fälle an, so ergiebt sich die Vergleichung

$$4.\quad B_1 : B_2 = w_1 G_1 : w_2 G_2.$$

Die Einlagen zweier Personen stehen demnach zu einander in zusammengesetztem Verhältnisse der zu erwartenden Gewinne und der Wahrscheinlichkeiten, sie zu erlangen. Haben die Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 gleiche Nenner, so fallen dieselben aus der Vergleichung weg. Bezeichnet man die Zähler durch m_1 und m_2, so geht (4.) in

$$5.\quad B_1 : B_2 = m_1 G_1 : m_2 G_2 \text{ über}$$

Diese Sätze lassen sich leicht ins Allgemeine ausdehnen, und es ist

$$6.\quad B_1 : B_2 : B_3 : \ldots B_n = w_1 G_1 : w_2 G_2 : w_3 G_3 \ldots . w_n G_n = m_1 G_1 : m_2 G_2 : m_3 G_3 \ldots . m_n G_n,$$

$$7.\quad B_k : B_1 + B_2 + B_3 \ldots . B_{k-1} + B_{k+1} \ldots . B_n = w_k G_k : w_1 G_1 + w_2 G_2 + \ldots . w_{k-1} G_{k-1} + w_{k+1} G_{k+1} \ldots . w_n G_n = m_k G_k : m_1 G_1 + m_2 G_2 + \ldots . m_{k-1} G_{k-1} + m_{k+1} G_{k+1} \ldots . m_n G_n,$$

$$8.\quad B_k : \Sigma_{n=1}^{n=n} B_n = w_k G_k : \Sigma_{n=1}^{n=n} w_n G_n = m_k G_k : \Sigma_{n=1}^{n=n} m_n G_n.$$

Vereinigen sich zwei Personen zum Spiele, so verlangt die Billigkeit, dafs der Werth ihrer Erwartung vor dem Beginne des Spiels gleich sei. Hieraus ergiebt sich leicht der Satz (2. §. 35.), nemlich

$$9.\quad w_1 G_1 = w_2 G_2.$$

Dieser Satz läfst sich leicht weiter ausdehnen und es ist

$$10.\quad w_1 G_1 = w_2 G_2 = w_3 G_3 = \ldots . w_n G_n.$$

Der Satz (9.) gilt auch noch, wenn eine von beiden Personen als Repreesentant von mehreren Theilnehmern betrachtet wird. Die Betrachtungs-Art wird dadurch nicht geändert. Es ist aus (9.)

$$11.\quad w_1 G_1 = (w_2 + w_3 + w_4 + \ldots . + w_n) G_2.$$

Aus (10.) folgt

$$12.\quad G_k : G_h = w_h : w_k = m_h : m_k,$$

wenn die Wahrscheinlichkeiten w_h und w_k gleiche Nenner haben und m_h und m_k deren Zähler bezeichnen. Ist in der Gleichung (8.) $B_1 = B_2 = B_3 \ldots . = B_n$,

so geht sie in folgende über:

$$13.\quad 1:n = w_k G_k : \Sigma_{n=1}^{n=n} w_n G_n = m_k G_k : \Sigma_{n=1}^{n=n} m_n G_n.$$

Es giebt Fälle, auf welche der Satz (12.) keine Anwendung findet; namentlich, wo eine bestimmte Reihenfolge eingehalten wird, mit welcher ein bestimmter Vortheil verbunden ist. Da aber dieser Vortheil der Reihe nach an Jeden kommt, so gleicht er sich wieder aus, und es bleibt den einzelnen Personen überlassen, ob sie unter solchen Verhältnissen in eine derartige Verbindung treten wollen. Bei Spielen mit Spielhaltern (Banquiers) ist dies auch der Fall. Es kann dies die Richtigkeit obiger Sätze nicht entkräften.

Aus der Gleichung (3.) ergiebt sich leicht

$$14.\quad G = \frac{B}{w} = \frac{q.B}{m}.$$

Diese Gleichung zeigt, wie aus der Einlage und der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen die Gröfse des zu erlangenden Gewinnes abgeleitet werden kann. Statt der Wahrscheinlichkeit kann auch das Verhältnifs zwischen der Zahl der günstigen Fälle und der aller möglichen Fälle gegeben sein. Ferner ergiebt sich hieraus

$$15.\quad B:G = m:q = w:1.$$

Die Einlage verhält sich also zum Gewinne, wie die Zahl der günstigen Fälle zur Zahl der möglichen, oder wie die zugehörige Wahrscheinlichkeit zur Einheit.

Spielen zwei Personen, deren eine vor dem Beginn des Spieles eine Einlage macht, die andere nach der Entscheidung den Gewinn auszuzahlen hat, so wird die Gröfse der auszuzahlenden Summe durch (14. oder 15.) bestimmt.

Aus (3.) ergiebt sich endlich auch die Gleichung

$$16.\quad w = \frac{B}{G}.$$

Sie zeigt, wie aus der Einlage und dem zu erwartenden Gewinne die zugehörige Wahrscheinlichkeit gefunden wird.

§. 39.

Sind die Einlagen gemacht und erfolgt nun die Vertheilung der Gewinne durch das Loos, so wird dem Gewinner die ihm gehörige Summe zugestellt. In dieser Summe ist die Einlage mitbegriffen. Zieht man die Einlage von der erhaltenen oder zu erlangenden Summe ab, so erhält man eine Gröfse, die wir „reinen Gewinn" nennen und durch R bezeichnen wollen. Dies giebt die Gleichung

$$1.\quad R = G - B.$$

Ist R eine positive Gröfse, so gilt die Gleichung in der vorstehenden Form und bezeichnet einen Vortheil. Wird aber der Werth von R negativ, so ist

$$2. \quad R = B - G,$$

welches auf Nachtheil deutet. Wird $R = 0$, so ist

$$3. \quad 0 = G - B \quad \text{oder} \quad G = B.$$

Es findet dann weder Vortheil noch Nachtheil Statt. Führen wir aus (3. §. 38.) den Werth für B in (1.) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$4. \quad R = G - wG = (1 - w)G.$$

Da nun $1 - w$ die dem Eintreffen eines Ereignisses entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit (5. §. 3.) bedeutet, so ergiebt sich, wenn wir dieselbe durch w_1 bezeichnen, aus (4.):

$$5. \quad R = w_1 G.$$

Die Gröfse des zu erwartenden reinen Gewinnes wird demnach durch das Product aus dem Gesammtgewinne G in die dem Eintreffen des bezüglichen Ereignisses entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit bestimmt.

Zerlegen wir nun die dem Eintreffen eines Ereignisses entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit in ihre Bestandtheile und nennen die Zahl der ungünstigen Fälle n, die Zahl aller möglichen Fälle, wie in (3. §. 38.), q, so geht (5.) in

$$6. \quad R = \frac{n}{q} \cdot G$$

oder in

$$7. \quad R : G = n : q = w_1 : 1 \quad \text{über.}$$

Der reine Gewinn verhält sich also zum Gesammtgewinne, wie die Zahl der dem Eintreffen des Ereignisses ungünstigen Fälle zu der Zahl aller möglichen Fälle, oder wie die dem Eintreffen ungünstige Wahrscheinlichkeit zur Einheit.

Aus (5. und 6.) ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$$8. \quad R_1 : R_2 = w_2 G_1 : w_1 G_2 = n G_1 : m G_2.$$

Wird der Werth von G aus (14. §. 38.) in (1.) gesetzt, so erhält man

$$9. \quad R = \frac{B}{w} - B = \frac{1-w}{w} B = \frac{w_1}{w} B = \frac{n}{m} B.$$

Hier bezeichnet w die günstige und w_1 die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, m die Anzahl der günstigen, n die der ungünstigen Fälle. Es folgt daraus

$$10. \quad R : B = w_1 : w = n : m.$$

Die Ausdrücke (9. und 10.) zeigen den Zusammenhang zwischen der Einlage und dem reinen Gewinn, der günstigen und der ungünstigen Wahrscheinlichkeit. Nach (10.) verhält sich der reine Gewinn zur Einlage, wie die ungünstige zur günstigen Wahrscheinlichkeit, oder wie die Zahl der günstigen zu der

der ungünstigen Fälle. Aus (5. und 6.) ergiebt sich

$$11. \quad G = \frac{R}{w_1} = \frac{q}{n}.R.$$

Aus (10.) ergiebt sich

$$12. \quad B = \frac{w.R}{w_1} = \frac{m.R}{n}.$$

Hieraus läfst sich die Gröfse der Einlage für einen bestimmten reinen Gewinn ableiten.

Wenn zwei Personen A_1, A_2 mit den beziehlichen Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2, die sich zur Einheit ergänzen, keine Einlage machen, sondern sich gegenseitig verpflichten, den reinen Gewinn einander nach der Entscheidung auszuzahlen, so ergiebt sich leicht der Satz, dafs die zu erwartenden reinen Gewinne umgekehrt sich verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten, die Gewinne zu erlangen, oder umgekehrt wie die Zahl der entsprechenden günstigen Fälle; denn es ist billig, dafs eine desto gröfsere Summe an den Gegner entrichtet werde, je kleiner die Zahl der dem Gegner günstigen Fälle ist, und dafs umgekehrt der Gegner eine um so geringere Summe zahle, je häufiger die Gelegenheit zu verlieren vorkommt. Bezeichnet man die reinen Gewinne durch R_1, R_2 und die Zahl der günstigen Fälle durch m_1, m_2, so ergiebt sich

$$13. \quad R_1 : R_2 = w_2 : w_1 = m_2 : m_1.$$

Dieser Satz fällt mit dem in (10.) zusammen, wenn man letztern auf den vorliegenden speciellen Fall anwendet. Es wird die Einlage, welche A_1 zu zahlen hat, zum reinen Gewinn für A_2; und umgekehrt. Dies rechtfertigt zugleich die Schlüsse oben in (18.).

Bei Lotterien, Spielen u. dergl. wird gegen eine bestimmte Einlage B im glücklichen Falle ein bestimmter Gewinn S ausgezahlt. Die Gröfse dieses Gewinnes ist in (14. §. 38.) angegeben. Vergleicht man diesen Gewinn mit der ausgezahlten Summe, so ergiebt sich

$$14. \quad V = \frac{B}{w} - S.$$

Ist $\frac{B}{w}$ gröfser als S, so ergiebt sich ein Abzug für den Gewinner oder ein Vortheil für den Unternehmer der Lotterie oder den Spielhalter, folglich ein Nachtheil für den Gewinner. Ist S gröfser als $\frac{B}{w}$, so ist der Gewinner im Vortheil. Ist $\frac{B}{w}$ gröfser als S, so läfst sich aus (14.) die Gröfse des Vortheils P für den Unternehmer bestimmen. Zu dem Ende ist die Gleichung (14.)

durch (14. §. 38.) zu dividiren. Demnach ist

$$15.\quad P = 1 - \frac{w.S}{B} = 1 - \frac{m.S}{q.B}.$$

Hier ist die Gröſse des Vortheils als Theil der Einheit angegeben. Führt man sie auf 100 zurück, so erhält man sie in *Procenten* ausgedrückt. Es ist

$$16.\quad P = 100\left(1 - \frac{w.S}{B}\right).$$

Einfacher werden diese Bestimmungen, wenn man die Einlage B auch als Einheit annimmt. Dann geht (15. und 16.) über in

$$17.\quad P = 1 - wS \text{ und}$$

$$18.\quad P = 100(1 - wS).$$

Der muthmaſsliche Vortheil, der auf Jemandes Seite fällt, kann auf folgende Weise bestimmt werden. Die Einlage sei, wie bisher, B; die für das Gewinnen bestimmte Summe sei tB; die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen sei w. Nach (2. §. 35.) ist der Werth der Erwartung oder der muthmaſsliche Gewinn wtB. Der hieraus erwachsende Vortheil ist

$$19.\quad V = wtB - B.$$

In diesem Falle muſs wtB gröſser als B, oder wt gröſser als die Einheit sein. Ein Nachtheil entsteht, wenn

$$20.\quad N = B - wtB$$

eine positive Gröſse, oder wenn die Einlage gröſser ist als wtB oder als der Werth des muthmaſslichen Gewinnes. Weder Nachtheil noch Vortheil findet Statt, wenn

$$21.\quad 0 = B - wtB \text{ ist.}$$

Der Vortheil zwischen zwei Personen A_1 und A_2 kann auch durch die Gröſse des reinen Gewinnes bestimmt werden. Beträgt der reine Gewinn von A_1 das $k_1$fache der Einlage B und der von A_2 das $k_2$fache derselben Einlage, und sind die Wahrscheinlichkeiten, diese Gewinne zu erlangen, w_1 und w_2, so ist der muthmaſsliche Gewinn von $A_1 = w_1k_1B$, der von $A_2 = w_2k_2B$ und es findet auf keiner Seite Vortheil Statt, wenn

$$22.\quad w_1k_1B - w_2k_2B = 0$$

ist. Der Vortheil für A_1 wird durch

$$23.\quad V_1 = w_1k_1B - w_2k_2B,$$

der Vortheil für A_2 durch

$$24.\quad V_2 = w_2k_2B - w_1k_1B$$

ausgedrückt. Ergeben sich negative Werthe, so geht der Vortheil in Nachtheil über.

Auf gleiche Weise ergeben sich diese Bestimmungen, wenn der Gesammtgewinn zu Grund gelegt wird. Bezeichnet man dieselben durch S_1 und S_2, so ist der Vortheil für A_1:

$$25.\quad V_1 = w_1 S_1 - w_2 S_2,$$

und der Vortheil für A_2:

$$26.\quad V_2 = w_2 S_2 - w_1 S_1.$$

Die Gleichungen (25. und 26.) gelten auch, wenn $S_1 = S_2$, oder wenn $w_1 + w_2 < 1$ ist; wie es bei der relativen Wahrscheinlichkeit vorkommt. Setzt man nämlich $w_1 = \frac{m_1}{q}$ und $w_2 = \frac{m_2}{q}$, so dafs $m_1 + m_2 < q$ ist, so deutet m_1 die Zahl der für A_1 und m_2 die Zahl der für A_2 günstigen Fälle an. Kämen nur $m_1 + m_2$ Fälle, in welchen der Gewinn entschieden wird, in Betracht, so wäre der Werth der Erwartung $= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot S_1$ für A_1 und $= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot S_2$ für A_2. Es kommen aber q Fälle in Betracht, unter welchen nur $m_1 + m_2$ die Entscheidung geben. Man hat daher die Entscheidung von $m_1 + m_2$ auf q Fälle zu übertragen. Der Gewinn wird also in beiden Fällen nur $\frac{m_1 + m_2}{q}$ mal vorkommen. Demnach ist der für A_1 zu erwartende Gewinn

$$P_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{q} \cdot S = \frac{m_1}{q} \cdot S_1,$$

der Gewinn für A_2 aber

$$P_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{q} \cdot S = \frac{m_2}{q} \cdot S_2.$$

Also ist der Vortheil für A_1:

$$27.\quad V_1 = \frac{m_1}{q} \cdot S_1 - \frac{m_2}{q} \cdot S_2,$$

und für A_2:

$$28.\quad V_2 = \frac{m_2}{q} \cdot S_2 - \frac{m_1}{q} \cdot S_1.$$

Die Gleichungen (25. und 27., 26. und 28.) stimmen überein.

§. 40.

Die in den beiden vorigen Paragraphen verzeichneten Gleichungen sind vielfacher Anwendungen fähig. Der Verdeutlichung wegen, und um dies zu zeigen, sollen hier einige besondere Fälle erörtert werden.

Zwei Personen A_1 und A_2 spielen mit einander mit drei Würfeln. A_1 übernimmt gegenüber von A_2, jede Nummer, die geworfen werden wird, mit der gehörigen Summe zu besetzen. A_2 darf irgend eine oder mehrere auswählen, die er jede mit einer bestimmten Summe besetzt. Wird eine von A_2 besetzte Nummer geworfen, so gewinnt A_2, und A_1 mufs den darauf geordneten Gewinn zahlen. Wird die von A_2 besetzte Nummer nicht geworfen, so erhält A_1 die von A_2 ausgesetzte Summe. Welches ist die Gröfse des jeder Nummer zugeordneten Gesammtgewinnes oder des reinen Gewinnes?

Die Nummern, welche mit den Würfeln geworfen werden können, sind 3, 4, 5, ... 18. Die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen dieser Zahlen ergeben sich aus (1. §. 13.). Daraus findet sich die Zahl der Fälle, wie oft diese Nummern geworfen werden können. Nun können die Einlagen auf jede Zahl beliebig gemacht werden. Wir nehmen zwei Fälle an. In dem einen soll die Einlage der Zahl der günstigen Fälle gleich sein, im andern die Einheit als Einlage auf jede Nummer gelten. Bei Bestimmung des Gesammtgewinnes kommt die Gleichung (14. §. 38.), bei der des reinen Gewinnes die Gleichung (9. §. 39.) zur Anwendung. Daraus ergeben sich folgende Tafeln:

1. Nummer	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Zahl der Würfe ...	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
Gröfse der Einlage	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
Gewinn sammt Einlage	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216
Reiner Gewinn ...	215	213	210	206	201	195	191	189	189	191	195	201	206	206	213	215

2. Nummer	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Zahl der Werthe ..	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
Gröfse der Einlage	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Gewinn nebst Einlage	216	72	36	$21\frac{3}{5}$	$14\frac{2}{5}$	$10\frac{2}{7}$	$8\frac{16}{25}$	8	8	$8\frac{16}{25}$	$10\frac{2}{7}$	$14\frac{2}{5}$	$21\frac{3}{5}$	36	72	216
Reiner Gewinn ...	215	71	35	$20\frac{3}{5}$	$13\frac{2}{5}$	$9\frac{2}{7}$	$7\frac{16}{25}$	7	7	$7\frac{16}{25}$	$9\frac{2}{7}$	$13\frac{2}{5}$	$20\frac{3}{5}$	35	71	215

Diese Tafeln gelten für zwei Spieler unter den obigen Bedingungen. Dabei kann eine und dieselbe Person mehrere Gegner haben; wie die Spielhalter oder die sogenannten Banken. Jede Person ist mit dem Spielhalter zusammen ein für sich bestehendes Paar. Sollte nun Jemand die Nummern 8, 9, 10, 11, 12, 13 als für sich gewinnend ansprechen, so hätte er als reinen

Gewinn $\frac{35}{78}$ der Einlage zu erwarten; wie sich aus (9. §. 38.) ergiebt. Zu demselben Resultat führt (14. §. 38.).

Zufolge der beiden obigen Tafeln hat keiner der beiden Gegner einen Vortheil vor dem andern. Dies ist aber bei Banken nicht der Fall, sondern ihre Einrichtung ist gewöhnlich so, dafs ein Vortheil auf die Seite des Unternehmers fällt; und dieser Vortheil ist oft ziemlich bedeutend; wie z. B. bei den Würfeltischen, die man zu Zeiten auf den Märkten oder Messen sieht. Als Erläuterung mag die Einrichtung des Lottospiels dienen.

Nach dem Königl. Baierischen Lottokalender vom Jahre 1839 wird die Einlage dem Gewinner

15 mal für einen unbestimmten Auszug,
75 - - - bestimmten Auszug,
270 - - eine unbestimmte Ambe,
5100 - - - bestimmte Ambe,
5400 - - - Terne,
60 000 - - - Quaterne

ausgezahlt. Die Wahrscheinlichkeiten, einen Auszug, eine Ambe, Terne und Quaterne zu treffen, ergeben sich, wenn in der Gleichung (1. §. 5.) statt p_1, p_2, m_1 und m_2 allmälig ihre Werthe gesetzt werden. Sie sind der Reihe nach $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{801}$, $\frac{1}{11748}$, $\frac{1}{511038}$. Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Auszug zu treffen, ist $\frac{1}{90}$, die eine bestimmte Ambe zu treffen $\frac{1}{90.89} = \frac{1}{8010}$. Nach (14. §. 38.) sollte die Einlage dem Gewinner

18 mal für einen unbestimmten Auszug,
90 - - - bestimmten Auszug,
400½ - - eine unbestimmte Ambe,
8010 - - - bestimmte Ambe,
11748 - - - Terne,
511038 - - - Quaterne

ausgezahlt werden; statt nach dem obigen Schema. Die Bank des Königl. Baierischen Lottospiels hat also nach (17. §. 39.) folgenden Gewinn:

Von einem unbestimmten Auszug	$1 - \frac{15}{18}$	$= 0,1666\ldots.,$
- - bestimmten Auszug	$1 - \frac{75}{90}$	$= 0,1666\ldots.,$
- einer unbestimmten Ambe	$1 - \frac{2.270}{801}$	$= 0,32584\ldots.,$
- - bestimmten Ambe . .	$1 - \frac{5100}{8010}$	$= 0,36329\ldots.,$
- - Terne	$1 - \frac{5400}{11748}$	$= 0,54034\ldots.,$
- - Quaterne	$1 - \frac{60000}{511038}$	$= 0,88259\ldots.;$

wenn die Einlage zur Einheit angenommen wird. Sie hat also von allen Einlagen, auf unbestimmte und bestimmte Auszüge $16\frac{2}{3}$, auf unbestimmte Amben $32\frac{1}{2}$, auf bestimmte 36, auf Ternen 54, auf Quaternen 88 Procent und noch etwas mehr Gewinn.

Nach *Lacroix* Wahrscheinlichkeitsrechnung (§. 66.) wird in der Lotterie von Frankreich der unbestimmte Auszug mit der 15fachen, der bestimmte mit der 70fachen, die unbestimmte Ambe mit der 270fachen, die bestimmte mit der 5100fachen, die Terne mit der 5500fachen, die Quaterne mit der 75000fachen, die Quinterne mit der 1000000fachen Einlage bezahlt. Daraus ergeben sich folgende Abzüge:

Von dem unbestimmten Auszug	$1-\frac{15}{18}$	$=$	0,1666....,
- - bestimmten Auszug	$1-\frac{70}{90}$	$=$	0,2222....,
- der unbestimmten Ambe	$1-\frac{2.270}{801}$	$=$	0,32548....,
- - bestimmten Ambe .	$1-\frac{5100}{8010}$	$=$	0,36329....,
- - Terne	$1-\frac{5500}{11748}$	$=$	0,53183....,
- - Quaterne	$1-\frac{75000}{511038}$	$=$	0,85324....,
- - Quinterne	$1-\frac{1000000}{43949268}$	$=$	0,97724....

Mehreres hierüber wird später folgen.

§. 41.

Bisher wurde die Beziehung zwischen Einlage und Gewinn betrachtet. Wir wenden uns nun zur Untersuchung des Verhältnisses des Werths der Erwartung zu der Art, die zu wagende Summe auszusetzen.

A will die Summe rB wagen. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist w, die zu verlieren $w_1 = 1 - w$. So oft *A* gewinnt, bekommt er die $q$fache Einlage als reinen Gewinn. Soll *A* die Summe rB in einem Versuche, soll er sie in r hintereinander folgenden, oder in gleichzeitigen Versuchen wagen, so dafs in jedem einzelnen Versuche die Summe *B* eingesetzt wird?

a. *A* wagt die Summe rB in *einem* Versuche. Gewinnt er, so erhält er die Summe $q.rB$. Der Werth seiner Erwartung ist nach (2. §. 35.)

$$1. \quad E = w.qrB.$$

b. Die genannte Summe wird auf r Versuche vertheilt und bei jedem *B* gesetzt. Es können folgende Fälle vorkommen: *A* gewinnt in allen Versuchen, oder in $r-1$, $r-2$, ... 2, oder in 1 Versuche: der Werth der Erwartung ist für die einzelnen Fälle zu bestimmen und die Resultate sind zusammenzuzählen.

Die Wahrscheinlichkeit, in *allen* Versuchen zu gewinnen, ist w^r. In diesem Falle gewinnt er rqB. Der Werth der Erwartung ist also

$$E_r = w^r r q B.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in $r-1$ Versuchen zu gewinnen, setzt voraus, dafs A einmal verliere. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $r.w^{r-1}w_1$. In diesem Falle wird er $(r-1)qB$ gewinnen. Der Werth der Erwartung ist demnach

$$E_{r-1} = r w^{r-1} w_1 (r-1) q B.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in $r-2$ Versuchen zu gewinnen, läfst zu, dafs das entgegengesetzte Ereignifs zweimal eintrete. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{r(r-1)}{1.2} w^{r-2} w_1^2$. In diesem Falle gewinnt A, $(r-2)qB$. Der Werth der Erwartung ist also

$$E_{r-2} = \frac{r(r-1)}{1.2} \cdot w^{r-2} w_1^2 (r-2) q B.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich für den Gesammtwerth der Erwartung:

$$\begin{aligned} E &= r w^r q B + r \cdot \frac{(r-1)}{1} \cdot w^{r-1} w_1 q B + r \cdot \frac{(r-1)(r-2)}{1.2} \cdot w^{r-2} w_1^2 q B \\ &\qquad + r \cdot \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3} \cdot w^{r-3} w_1^3 q B + \dots \\ &\qquad \dots + r \cdot \frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}} \cdot w w_1^{r-2} q B + r \cdot \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot w w_1^{r-2} q B \\ &= r q B . w \Big[w^{r-1} + \frac{r-1}{1} \cdot w^{r-2} w_1 + \frac{(r-1)^2}{1^{2|1}} \cdot w^{r-3} w_1^2 + \dots \\ &\qquad \dots + \frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot w w_1^{r-2} + \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot w_1^{r-1} \Big]. \end{aligned}$$

Da die eingeklammerte Reihe mit dem Binomium $(w+w_1)^{r-1} = 1$ zusammenfällt, so geht der vorliegende Ausdruck in folgenden über:

$$2. \quad E = w r q B.$$

Das Gleiche ergiebt sich, wenn die Versuche gleichzeitig gemacht werden. Die Vergleichung von (1. und 2.) giebt daher, in Verbindung mit der eben ausgesprochenen Bemerkung, folgenden Satz.

3. Der Werth der Erwartung oder objectiven Hoffnung bleibt derselbe, man mag eine Summe in *einem* Versuche wagen, oder auf *mehrere* gleiche vertheilen, wenn die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen in den einzelnen Versuchen gleich bleibt.

Hierher gehört auch die Untersuchung des folgenden Problems.

In einer Urne sind m Kugeln enthalten, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnet. Es werden p Kugeln nach einander gezogen und nach der Ziehung zusammen in die Urne zurückgelegt. Jede Zahl kann mit einer gewissen Summe besetzt werden. Erscheint die besetzte Zahl unter den gezogenen Kugeln, so wird die eingesetzte Summe $q$mal als reiner Gewinn bezahlt. A will die Summe rB wagen. Soll er sie auf *eine* Zahl setzen, oder auf *mehrere* Zahlen derselben Ziehung vertheilen, so dafs jede Zahl mit B besetzt wird?

Auch hier sind die beiden oben angeführten Fälle zu untersuchen.

a. A setzt die Summe rB auf *eine* Zahl. Er erhält im günstigen Falle qrB. Die Wahrscheinlichkeit, dafs die besetzte Zahl unter p gezogenen erscheinen werde, ist nach (1. §. 5.) $\frac{p(m-1)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}} = \frac{p}{m}$. Demnach ist der Werth der Erwartung

$$4.\quad E = \frac{p}{m}\cdot rqB.$$

b. Die Summe B wird auf r Zahlen vertheilt. Es können daher r, oder $r-1$, oder $r-2$, ..., oder 2, oder 1 von den besetzten Zahlen erscheinen. Die Gewinne, welche in diesem Fall erlangt werden, sind rqB, $(r-1)qB$, $(r-2)qB$, ... $2qB$, qB. Die Wahrscheinlichkeiten, dafs r, $r-1$, $r-2$, $r-3$, ... 3, 2, 1 von den besetzten Zahlen erscheinen werden, ergeben sich aus (1. §. 5.) und sind der Reihe nach

$$\frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r^{r|-1}(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}},\qquad \frac{p^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{r^{r-1|-1}(m-r)^{p-r+1|-1}}{m^{p|-1}},$$

$$\frac{p^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}}\cdot\frac{r^{r-2|-1}(m-r)^{p-r+2|-1}}{m^{p|-1}},\;\ldots\quad \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{r^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}} + \frac{p}{1}\cdot\frac{r(m-r)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}}.$$

Werden diese Werthe mit den zugehörigen Gewinnen verbunden, so ergiebt sich folgender Ausdruck des Werths der Erwartung:

$$E = \frac{rp^{r|-1}(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}\cdot qB + r\cdot\frac{r-1}{1}\cdot\frac{p^{r-1|-1}(m-r)^{p-r+1|-1}}{m^{p|-1}}\cdot qB$$

$$+ r\cdot\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\cdot\frac{p^{r-2|-1}(m-r)^{p-r+2|-1}}{m^{p|-1}}\cdot qB + \ldots$$

$$\ldots + r\cdot\frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}}\cdot\frac{p^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}}\cdot qB + r\cdot\frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{p(m-r)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}}\cdot qB.$$

Werden die jedem Gliede gemeinschaftlichen Gröfsen und ferner die Facultät

$$(m-r)^{p-r|-1} = (m-r)(m-r-1)(m-r-2)\ldots(m-p+1)$$

ausgestofsen, so geht die Gleichung in folgende über:

$$E = \left[\frac{p(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}} \cdot rqB\left[(p-1)^{r-1|-1} + \frac{r-1}{1}(p-1)^{r-2|-1}(m-p)^{1|-1}\right.\right.$$
$$+ \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(p-1)^{r-3|-1}(m-p)^{2|-1} + \ldots.$$
$$\left.\left.\ldots. + \frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}}(p-1)(m-p)^{r-2|-1} + \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}(m-p)^{r-1|-1}\right]\right].$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe dieses Ausdrucks läfst sich auf folgende Weise behandeln:

5. $(a+b)^{s|-1} = a^{s|-1} + \frac{s}{1} \cdot a^{s-1|-1} b + \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot a^{s-2|-1} b^{2|-1} + \ldots. + \frac{s^{s-1|-1}}{1^{s-1|1}} \cdot a b^{s-1|-1} + b^{s|-1}.$

Hiedurch erhält man folgende Gleichung:

$$E = \frac{p(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}} \cdot rqB(m-1)^{r-1|-1} = \frac{p(m-1)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}} \cdot rqB.$$

Es ist also

$$6. \quad E = \frac{p}{m} \cdot rqB.$$

Aus (4. und 6.) ergiebt sich die Gleichheit der Werthe der Erwartung und es bestätigt sich der Satz in (3.).

Die Resultate (4. und 6.) gelten zunächst nur für den Fall, wenn r kleiner, oder höchstens so grofs als p ist. Sie gelten jedoch auch noch, wenn r gröfser als p wird. In diesem Falle können von den besetzten Zahlen höchstens p, also entweder p, oder $p-1$, oder $p-2$, ... 2, 1 gewinnen. Wird nun für jeden einzelnen Fall auf die vorhin angegebene Weise der Werth der Erwartung bestimmt, so ergiebt sich für den Gesammtwerth der Erwartung:

$$E = \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{r^{p|-1}}{m^{p|-1}} \cdot p \cdot qB + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{r^{p-1|-1}(m-r)}{m^{p|-1}}(p-1)qB$$
$$+ \frac{p^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} \cdot \frac{r^{p-2|-1}(m-r)^{2|-1}}{m^{p|-1}}(p-2)qB + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{r^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}} \cdot 2qB + p \cdot \frac{r(m-r)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}} \cdot qB.$$

Werden die gleichen Factoren ausgeschieden, so erhält man

$$E = \frac{p \cdot rqB}{m^{p|-1}}\left[(r-1)^{p-1|-1} + \frac{p-1}{1}(r-1)^{p-2|-1}(m-r)\right.$$
$$+ \frac{(p-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(r-1)^{p-3|-1}(m-r)^{2|-1} + \ldots.$$
$$\left.\ldots. + \frac{(p-1)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}(r-1)(m-r)^{p-2|-1} + (m-r)^{p-1|-1}\right].$$

Wird hier die eingeschlossene Reihe nach (5.) behandelt, so ergiebt sich

$$7. \quad E = \frac{p}{m} \cdot rqB.$$

Nach (4. 6. und 7.) findet also für die Rechnung kein Unterschied Statt. Dies scheint eine Art von Paradoxon zu sein. Ist namentlich r gröfser als p, oder die Zahl der einfachen Einlagen gröfser als die Zahl der Kugeln, welche in einer Ziehung gezogen werden, so können höchstens p Kugeln gewinnen und dann kann A im glücklichsten Fall nur $p.qB$ erhalten, während er im glücklichen Falle eine viel gröfsere Summe $r.qB$ erlangen kann, wenn er die Summe rB auf eine einzige Zahl setzt. Dieser Widerspruch hebt sich aber dadurch, dafs der Werth der Erwartung den mittlern oder Durchschnittswerth für alle möglichen Gewinne giebt, und dafs dieser Werth einer bestimmten Summe gleichkommen kann, ohne dafs die einzelnen Gewinne, durch welche er bedingt ist, zu einer solchen Höhe anwachsen, als es in einem andern Falle vorkommen kann.

Der Satz (3.) ist bekannt, und schon von *Lacroix* in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung (§. 75.) bewiesen. Die Sätze (4. 6. und 7.) sind, wie man sieht, eine Erweiterung jenes Satzes, und hier aufgestellt, weil sie nicht bekannt zu sein scheinen. *Gauthier d'Hauteserve* hat in seinem „Traité sur les probab. Probl. XVII. pg. 77" starke Verstöfse dagegen gemacht, die er vermieden hätte, wenn er auf den dort erörterten Fall aufmerksamer gewesen wäre. Der Werth der Erwartung in Beziehung auf den reinen Gewinn ist für Jemand, der drei Franken in das Lottospiel setzen will, nach (§. 35. und 40.) immer 2,333... Fr., er mag sie auf *eine* Nummer, oder auf *drei* Nummern derselben Ziehung, oder auf Nummern aus drei verschiedenen Ziehungen setzen; nicht aber, wie *G. d'H.* meint, im ersten Falle 2,333... Fr., im zweiten 2,5464... Fr., im dritten gar 2,6001 Fr. Aufserdem scheint in der von *G. d'H.* angegebenen Zahl 2,5464... ein Druck- oder Rechnungsfehler zu sein.

§. 42.

Zwei Personen A_1 und A_2, von welchen die erste r, die zweite s Marken hat und deren Hoffnung zu gewinnen $\frac{a}{a+b} = w_1$ und $\frac{b}{a+b} = w_2$ ist, spielen mit einander. Der Verlierende giebt dem Gewinnenden eine Marke ab. Das Spiel dauert so lange, bis eine von beiden Personen alle Marken gewonnen hat. Wie grofs ist der Werth der Erwartung für A und für B vor dem Anfange des Spiels?

Der Werth der Erwartung des A_1 soll durch A ausgedrückt werden, und zwar so, dafs unten rechts an A die Zahl der Marken angeschrieben wird, die er besitzt. So oft nun ein weiteres Spiel beginnt, kann A_1 in demselben eine Marke gewinnen, oder verlieren. Im ersten Falle bekommt er eine mehr, im zweiten verliert er eine. Demnach ist die Erwartung für A_1, wenn er k Marken besitzt, für das nächste Spiel:

$$1.\quad A_k = w_1 A_{k+1} + w_2 A_{k-1} = \frac{a}{a+b} A_{k+1} + \frac{a}{a+b} A_{k-1}.$$

Wäre der Werth für A_{k+1} und A_{k-1} bestimmt, so wäre auch A_k gegeben. Um diesen Werth zu finden, ist zu bemerken, dafs für A alle Wechselfälle im Besitze der Marken von 1 bis $r+s-1$ möglich sind. Der Spieler kann im Laufe des Spiels alle möglichen Zahlen von Marken zwischen 1 und $r+s-1$ besitzen, verlieren und wiedergewinnen, wenn er nur nicht die letzte verloren hat. Für jeden Besitzstand gilt daher die obige Gleichung. Um den Werth von A_k zu finden, dient die Zurückführung auf einfache Fälle. Zu dem Ende müssen in die Gleichung (1.) allmälig die Werthe 1, 2, 3, ... $r+s-1$ statt k gesetzt werden. Dies giebt folgendes Schema:

$$2.\quad \left\{\begin{array}{rcl}
A_1 &=& w_1 A_2 + w_2 A_0, \\
A_2 &=& w_1 A_3 + w_2 A_1, \\
A_3 &=& w_1 A_4 + w_2 A_2, \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
A_p &=& w_1 A_{p+1} + w_2 A_{p-1}, \\
A_{p+1} &=& w_1 A_{p+2} + w_2 A_p, \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
A_{p+r-2} &=& w_1 A_{p+r-1} + w_2 A_{p+r-3}, \\
A_{p+r-1} &=& w_1 A_{p+r} \;\; + w_2 A_{p+r-2}.
\end{array}\right.$$

Das Schema ist *zurücklaufend*. Es müssen daher die Werthe der frühern A in den spätern substituirt werden. Nun ist leicht zu sehen, dafs $A_0 = 0$ ist; denn für den Fall, wo A_1 die letzte Marke verliert, ist der Werth seiner Erwartung 0. Wird nun der Werth für A_1 aus der ersten Gleichung in (2.) eingeführt, so ergiebt sich:

$$A_2 = \frac{w_1}{1 - w_1 w_2} A_3.$$

Diesen Werth in die dritte Gleichung gesetzt, giebt

$$A_3 = \frac{w_1(1 - w_1 w_2)}{1 - 2 w_1 w_2} A_4.$$

Durch Fortsetzung dieser Rechnung erhält man

$$A_4 = \frac{w_1(1-2w_1w_2)}{1-3w_1w_2+(w_1w_2)^2} \cdot A_5,$$

$$A_5 = \frac{w_1(1-3w_1w_2+(w_1w_2)^2)}{1-4w_1w_2+3(w_1w_2)^2} \cdot A_6,$$

$$A_6 = \frac{w_1(1-4w_1w_2+3(w_1w_2)^2)}{1-5w_1w_2+6(w_1w_2)^2-(w_1w_2)^3} \cdot A_7,$$

$$A_7 = \frac{w_1(1-5w_1w_2+6(w_1w_2)^2-(w_1w_2)^3)}{1-6w_1w_2+10(w_1w_2)^2+4(w_1w_2)^3} \cdot A_8,$$

u. s. w. Das Fortschreitungsgesetz ist deutlich. Es wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$3.\quad A_k = \frac{w_1\left(1-\frac{k-2}{1}w_1w_2+\frac{(k-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots\right)}{1-\frac{k-1}{1}w_1w_2+\frac{(k-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-3)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots} \cdot A_{k+1}.$$

Dieses Gesetz giebt den Werth der Erwartung für A_1, wenn er k Marken besitzt, in Beziehung auf das nächste Spiel. Es läfst sich weiter benutzen, um den Werth der Erwartung von A_1 für spätere Spiele darzustellen. Setzt man nämlich $k+1$ statt k in (3.) und führt den dadurch erhaltenen Werth statt A_{k+1} in (3.) ein, so ergiebt sich

$$4.\quad A_k = \frac{w_1^2\left(1-\frac{k-2}{1}w_1w_2+\frac{(k-3)^{2|-1}}{1^{2|-1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-4)^{3|-1}}{1^{3|-1}}(w_1w_2)^3+\dots\right)}{1-\frac{k}{1}w_1w_2+\frac{(k-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-2)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots} \cdot A_{k+2}.$$

Setzt man $k+2$ statt k in (3.) und führt den erhaltenen Werth statt A_{k+2} in (4.) ein, so geht (4.) über in

$$5.\quad A_k = \frac{w_1^3\left(1-\frac{k-2}{1}w_1w_2+\frac{(k-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots\right)}{1-\frac{k+1}{1}w_1w_2+\frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots} \cdot A_{k+3}.$$

Führt man auf diese Weise fort, so ergiebt sich allgemein für den Werth der Erwartung von A_1, m Marken zu gewinnen wenn er k Marken hat:

$$6.\quad A_k = \frac{w_1^m\left(1-\frac{k-2}{1}w_1w_2+\frac{(k-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots\right)}{1-\frac{k+m-2}{1}w_1w_2+\frac{(k+m-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_1w_2)^2-\frac{(k+m-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_1w_2)^3+\dots} \cdot A_{k+m}.$$

Diese Gleichung bestimmt den Werth der Erwartung für A_1 allgemein; also auch in der oben angegebenen Weise. Man hat zu dem Ende r statt k und s

statt m zu setzen. Sie bestimmt auch den Werth der Erwartung für A_2, der s Marken hat, r Marken zu gewinnen, wenn s statt k, r statt m, w_2 statt w_1 und B statt A gesetzt wird. Es ist

$$7.\quad B_s = \frac{w_2^r\left(1-\frac{s-2}{1}w_2 w_1+\frac{(s-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(w_2 w_1)^2-\frac{(s-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_2 w_1)^3+\ldots\right)}{1-\frac{s+r-2}{1}w_2 w_1+\frac{(s+r-3)^{2|1}}{1^{2|1}}(w_2 w_1)^2-\frac{(s+r-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}(w_2 w_1)^3+\ldots}\cdot B_{r+s}.$$

Die gefundenen Gleichungen geben andere Ausdrücke, wenn man $w_1=\frac{a}{a+b}$ und $w_2=\frac{b}{a+b}$ setzt und die nöthigen Reductionen macht. Sie gehen dann in folgende über:

$$A_1 = \frac{a}{a+b}\cdot A_2,$$

$$A_2 = \frac{a(a+b)}{a^2+ab+b^2}\cdot A_3,$$

$$A_3 = \frac{a(a^2+ab^2+b^2)}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\cdot A_4,$$

$$A_4 = \frac{a(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}\cdot A_5,$$

. . . .

Hieraus ergiebt sich durch Fortsetzung der Substitutionen:

$$8.\quad A_k = \frac{a(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\ldots ab^{k-2}+b^{k-1})}{a^k+a^{k-1}b+a^{k-2}b^2+\ldots ab^{k-1}+b^k}\cdot A_{k+1}.$$

Nun ist

$$a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots ab^{m-1}+b^m = \frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}.$$

Also geht (8.) in

$$9.\quad A_k = \frac{a(a^k-b^k)}{a^{k+1}-b^{k+1}}\cdot A_{k+1}$$

über. Setzen wir die Substitutionen fort, wie sie in (4., 5. u. s. w) gemacht wurden, so ergiebt sich

$$A_k = \frac{a^2(a^k-b^k)}{a^{k+2}-b^{k+2}}\cdot A_{k+2},\qquad A_k = \frac{a^3(a^k-b^k)}{a^{k+3}-b^{k+3}}\cdot A_{k+3},$$

u. s. w. Durch weitere Fortsetzung ergiebt sich hieraus für den Spieler A_1, der r Marken besitzt, der Werth der Erwartung, die s Marken seines Gegners zu gewinnen,

$$10.\quad A_r = \frac{a^s(a^r-b^r)}{a^{s+r}-b^{s+r}}\cdot A_{r+s}.$$

Für $A_{\frac{1}{2}}$ aber ist der Werth der Erwartung, r Marken seines Gegners zu erlangen,

$$11. \quad B_s = \frac{b^r(b^s - a^s)}{b^{s+r} - a^{s+r}} \cdot B_{s+r}.$$

Haben beide Gegner die gleiche Anzahl von Marken, so ergiebt sich aus (10. und 11.), da $r = s$ ist:

$$12. \quad A_r = \frac{a^r}{a^r + b^r} \cdot A_{2r},$$

$$13. \quad B_r = \frac{b^r}{a^r + b^r} \cdot B_{2r}.$$

Sind die Wahrscheinlichkeiten für beide Gegner gleich, so ist aus (10. und 11.)

$$14. \quad A_r = \frac{r}{s+r} \cdot A_{r+s},$$

$$15. \quad B_s = \frac{s}{s+r} \cdot B_{r+s}.$$

Am einfachsten ist es, den Werth der Erwartung auf die Einheit zu beziehen, also A_{r+s} und B_{r+s} durch die Einheit darzustellen. Dies giebt aus den Gleichungen (12. und 13., 14. und 15.) folgende Vergleichung für den Werth der Erwartung der beiden Personen:

$$16. \quad A_r : B_r = a^r : b^r,$$

$$17. \quad A_r : B_r = r : s.$$

Hat jede Person 6 Marken, ist aber ihre Geschicklichkeit um $\frac{1}{11}$ verschieden, so verhält sich der Werth der Erwartung beider zu einander nach (16.) wie

$$A_r : B_r = 6^6 : 5^6 = 46656 : 15625$$

oder nahe wie 3:1. Hat jede 6 Marken und ist ihre Geschicklichkeit um $\frac{1}{41}$ verschieden, so ist für den Werth der Erwartung

$$A_r : B_r = 21^6 : 20^6 = 85766121 : 64000000$$

oder nahe wie 134:100. Hat jede 12 Marken, unter den nämlichen Bedingungen, so ist

$$A_r : B_r : 21^{12} : 20^{12},$$

oder beinahe wie 2 zu 1. Man sieht, wie wirksam hier die gröfsere Geschicklichkeit auf den Werth der Erwartung ist. Von den Gleichungen (16. und 17.) lassen sich noch weitere Anwendungen machen. Man kann nämlich leicht die Zahl der Marken bei bestimmtem Werthe der Erwartung und die Wahrscheinlichkeiten, oder auch letztere durch erstere bestimmen.

Die vorstehende Aufgabe ist von *Laplace* (Recueil de l'académie d. sciences d. Paris p. l'année 1778 p. 227 u. ff.) durch die Methode der Gleichun-

gen mit endlichen Differenzen aufgelöset worden. Im 2ten Bande der „Annales d. mathém. pures et appliquées p. *J. D. Gergonne* pg. 340 u. ff." finden sich drei Auflösungen: die eine auf elementare Weise, die andere durch die Methode der recurrirenden Reihen, die dritte durch eine lineare Gleichung zweiter Ordnung mit endlichen Differenzen, nach der Methode, wie sie *Lagrange* in den „Mémoires d. l'acad. d. Berlin p. l'année 1775" gegeben hat. Hiermit ist „*Laplace* Théor. d. probab. pg. 405 u. ff." und „Mémoires des savans étrangers, T. VII. pg. 153" zu vergleichen.

§. 43.

Im Vorhergehenden wurde die Ermittelung des Werths der objectiven Hoffnung und der damit in Beziehung stehende Vortheil oder Nachtheil gezeigt. Wir wollen nun das Verhältnifs dieses Werthes zu dem Besitze eines Individuums erörtern, welches im Begriff steht, sich auf ein Unternehmen einzulassen, dessen Ausgang nicht mit Sicherheit vorauszusehen ist, und wovon Gewinn oder Verlust bestimmter Summen abhangt.

Der Besitz eines Individuums werde durch K, der zu hoffende Gewinn durch G, die Einlage oder der bevorstehende Verlust durch B und die Wahrscheinlichkeit des Gelingens durch w, die des Mifslingens durch $1-w=w_1$ bezeichnet.

Wird die Einlage, wie es gewöhnlich geschieht, vor der Ausführung des Unternehmens gemacht, so ist der hiedurch bedingte Besitz des Individuums noch $K-B$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs dieser Fall eintreten werde, ist w, und folglich der muthmaafsliche Werth

$$M_1 = w_1(K-B).$$

Gelingt das Unternehmen, so ist der Besitz $K-B+G$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es geschehen werde, ist w, also der muthmaafsliche Werth

$$M = w(K-B+G).$$

In den einen oder den andern Fall kommt der Unternehmer. Der Werth der Erwartung ist demnach

$$1. \quad E = w_1(K-B)+w(K-B+G) = K-B+wG.$$

Kommt nun wG, wie in (3. §. 38.) vorausgesetzt wurde, der Einlage gleich, so folgt, dafs dann der Besitzstand des Individuums hiedurch nicht verändert wird. Es ergiebt sich also hieraus folgender Satz:

2. Aus dem Werthe der objectiven Hoffnung ist unter den angeführten Bedingungen auf keine Änderung des Besitzstandes eines Individuums zu schliefsen, und er zeigt weder einen Vortheil noch einen Nachtheil an. Erwägt man aber,

dafs in der Regel der zu erwartende Gewinn mit einem Abzuge belastet ist und dafs also $wG < B$ ist, so folgt, dafs jedes Unternehmen, welches unter dieser Voraussetzung begonnen wird, als nachtheilig für den Besitz eines Individuums betrachtet werden mufs und dafs Derjenige, welcher demungeachtet auf ein solches Unternehmen eingeht, seinen Besitzstand gefährdet. Nur wenn wG gröfser als B ist, wird das Unternehmen vortheilhaft sein.

Dieselben Resultate ergeben sich, wenn die Einlage nicht vor, sondern nach der Entscheidung gemacht und wenn dann nur der reine Gewinn verabfolgt wird. Im Falle des Mifslingens ist der Besitzstand nach der Entscheidung $K - B$ und der hierdurch bedingte muthmaafsliche Besitz

$$M_1 = w_1(K - B).$$

Im Fall des Gelingens ist der Besitzstand $K + R$ und der muthmaafsliche Besitz

$$M = w(K + R),$$

folglich der Werth der Erwartung

$$3. \quad E = w_1(K - B) + w(K + R) = K - w_1 B + wR.$$

Diese Gleichung deutet auf keine Änderung im Besitzstande, wenn nach (10. §. 39.) $w_1 B = wR$ ist, und der in (2.) ausgesprochene Satz bestätigt sich auch hier.

§. 44.

Weiter oben wurden die Grundsätze betrachtet, nach welchen der Werth der Erwartung ohne Rücksicht auf die Verhältnisse der Personen, welche sich auf Gewinn oder Verlust bringende Unternehmungen einlassen, zu bestimmen ist. Dabei wurde hauptsächlich die Forderung gesetzt, dafs keine *Bevortheilung* auf irgend einer Seite Statt finden dürfe. Sind nun auch die Bedingungen, unter welchen Unternehmungen begonnen und ausgeführt werden, im Allgemeinen oder in Rücksicht auf äufsere Umstände gleich, so können sie doch in Beziehung auf subjective Verhältnisse sehr ungleich sein. Die Ausführung eines Unternehmens, bei welchem nicht unbedeutende Summen gewagt werden, kann für eine Person von vielen Mitteln leicht zu bewerkstelligen sein, während sie für beschränkte Mittel unthunlich wird. Der Gegenstand selbst bleibt hiebei ganz unverändert und der Werth der objectiven Hoffnung ist im Falle des Gelingens für die eine wie für die andere Person derselbe. Anders verhält es sich, wenn die subjectiven Verhältnisse einer Person in Betracht gezogen werden. So kann eine Person, die 1000 Gulden besitzt, leichter eine Summe von 10 G. der Gefahr des Verlierens aussetzen, als eine, die nur 100 G. besitzt. Die 10 G. haben eine ganz andere Bedeutung für Jemand

der 100, als für Jemand der 1000 G. besitzt. Eben so hat die Erwerbung der 10 G. eine ganz andere Bedeutung für einen Besitzstand von 100, als für ein Vermögen von 1000 G.

Wir werden hiedurch auf den Begriff von *subjectiver Bedeutung* einer zu wagenden Summe für den Unternehmer geführt. Wir wollen diesem Begriff den Namen „*Subjective Hoffnung*" geben und deren Werth den „*Werth der subjectiven Hoffnung*" nennen.

Daniel Bernoulli, der zuerst hierauf aufmerksam machte, hat diesen Begriff durch *Mensura sortis* bezeichnet, *Laplace* (Théor. anal. d. Probab. Chap. X.) hat ihn *fortune morale, espérance morale* genannt. Besser scheint ihn der obige Name zu bezeichnen.

Um den Werth einer subjectiven Hoffnung zu finden, wird nöthig sein, den Besitz einer Person nicht nur mit dem zu befürchtenden Verluste, sondern auch den zu erwartenden Gewinn mit dem aus dem erhaltenen Gewinne folgenden Besitzstande, zu vergleichen. Aus dem Verhältnifs dieser Zustände wird sich die Bedeutung des zu befürchtenden Verlustes und des zu erwartenden Gewinnes ergeben.

Bezeichnet K den Besitz einer Person und B die Summe, um deren Verlust oder Gewinn es sich handelt, so drückt

$$\frac{B}{K}$$

die Bedeutung der Summe B in Beziehung auf den Besitz der Person, oder die Wichtigkeit dieser Summe als *Verlust*, und

$$\frac{B}{K+B}$$

die Bedeutung der Summe in Beziehung auf den durch den Gewinn herbeigeführten Besitzstand, oder die Wichtigkeit dieser Summe als *Gewinn* aus. Es ist daher der Werth der subjectiven Hoffnung hinsichtlich des zu befürchtenden *Verlustes* (T):

$$1.\quad T = \frac{B}{K},$$

und hinsichtlich des zu erwartenden *Gewinnes* (V):

$$2.\quad V = \frac{B}{K+B}.$$

Dies giebt folgende Vergleichung:

$$3.\quad T:V = \frac{B}{K}:\frac{B}{K+B} = K+B:K.$$

Die Bedeutung des Verlustes und Gewinns, welche eine und dieselbe Summe für den Besitzstand einer Person hat, verhält sich also zu einander, wie der durch den Gewinn vergröfserte Besitzstand zu dem ursprünglichen; und umgekehrt. Bringt man (3.) auf die Form

$$4. \quad T:V = 1:\frac{K}{K+B} = 1+\frac{B}{K}:1,$$

so sieht man, dafs *dieselbe* Summe, welche verloren oder gewonnen werden kann, als Verlust eine gröfsere Bedeutung hat, denn als Gewinn, und dafs der Gewinn einer Summe den Besitz in geringerem Verhältnisse steigert, als ihr Verlust denselben schwächt. So hat der Verlust von 10 G. für einen Besitz von 100 G. die Bedeutung $\frac{1}{10}$, und der Gewinn der gleichen Summe die Bedeutung $\frac{1}{11}$.

Hieraus zeigt sich schon, welche Vorsicht bei Anlegung von Summen auf Gewinn oder Verlust nöthig ist, da immer der Gewinn für das nämliche Individuum eine geringere Bedeutung hat, als der Verlust; und wie ungünstig wiederholt erlittene Verluste wirken. Zugleich zeigt sich, wie unklug es ist, im Unglücke durch Wiederholung und Steigerung des Einsatzes die früher erlittenen Verluste ausgleichen zu wollen, da die Anstrengungen immer ungleicher werden.

Untersucht man, um Dies näher zu zeigen, den Werth der subjectiven Hoffnung nach $n$maligem Verluste der Summe B, so findet man aus (3.) folgende Vergleichung:

$$5. \quad T:V = \frac{B}{K-nB}:\frac{B}{K+(n+1)B} = K+(n+1)B:K-nB.$$

Die Gröfse des Unterschiedes von Verlust und Gewinn ist

$$6. \quad V-T = \frac{(2n+1)B^2}{(K-nB)(K+(n+1)B)};$$

und dieser Unterschied wird immer gröfser, je gröfser n wird. Die Bedeutung von Gewinn und Verlust kommt daher in ein immer gröfseres Mifsverhältnifs.

Vergleicht man nun den Werth, welchen die nämliche Summe als Gewinn und Verlust für Personen von verschiedenem Besitze hat, so ergeben sich folgende Vergleichungen:

$$7. \quad V_1:V_2 = \frac{B}{K_1+B}:\frac{B}{K_2+B} = K_2+B:K_1+B,$$

$$8. \quad T_1:T_2 = \frac{B}{K_1}:\frac{B}{K_2} = K_2:K_1.$$

Der Ausdruck (7.) zeigt, dafs die Bedeutung der nämlichen Summe als *Gewinn* für Personen von verschiedenem Besitze in umgekehrtem Verhältnisse des durch den Gewinn veränderten Besitzstandes steht; der Ausdruck (8.) zeigt, dafs die Bedeutung der nämlichen Summe als *Verlust* für Personen von verschiedenem Besitze in umgekehrtem Verhältnisse des ursprünglichen Besitzes ist. Für den Bemittelteren hat daher Gewinn und Verlust derselben Summe eine geringere Bedeutung, als für den weniger Bemittelten; und zwar in desto geringerem Maafse, je gröfser die ihnen zu Gebote stehenden Mittel sind. Das Umgekehrte findet für den Unbemittelteren Statt. Für gleich bemittelte Personen hat Gewinn und Verlust die gleiche Bedeutung. Daran knüpft sich die weitere Folgerung, dafs es am zweckmäfsigsten ist, wenn sich Personen von gleichen Mitteln in Gesellschaften zu Erreichung beliebiger Zwecke vereinigen; denn für sie hat Gewinn und Verlust, oder Förderung und Beeinträchtigung der gemeinschaftlichen Interessen gleiche Bedeutung, und es ist zu erwarten, dafs in so constituirten Gesellschaften der Gemeinsinn stärker und fester hervortreten werde, als in andern von verschiedenen Interessen.

Soll unter den Bestimmungen (3.) die Bedeutung des Verlustes, den Jemand erleiden kann, der Bedeutung des zu erwartenden Gewinnes für einen bestimmten Besitz *gleich* sein, so ergiebt sich für die Gröfse des Verlusts:

$$9. \quad x = \frac{K.B}{K+B}.$$

Diese Gleichung erhält man, wenn x statt B in (1.) und $T = V$ in (3.) gesetzt wird. Der Gewinn, welcher für einen bestimmten Verlust bei einem bestimmten Besitze gleiche Bedeutung hat, ist unter ähnlicher Annahme aus (2.):

$$10. \quad y = \frac{K.B}{K-B}.$$

Eben so ergeben sich dieselben Begriffe für wiederholtes Gewinnen und Verlieren aus (5.), nemlich:

$$11. \quad x = \frac{K.B}{K+(2n+1)B},$$

$$12. \quad y = \frac{K.B}{K-(2n+1)B}.$$

Im ersten Falle drückt B Gewinn, im zweiten Verlust aus.

§. 45.

Jeder hat in seiner ***Persönlichkeit*** einen bestimmten Besitz, den er einem Capitale gleich anschlagen kann, welches nach Verhältnifs seines Fleifses

und seiner Talente rentirt. Man kann daher sagen, daſs Niemand absolut arm geboren sei. Bildet er seine Talente aus, steigert er seine Brauchbarkeit, und dauert er in seinem Fleiſse aus, so vermehrt er die ihm hieraus erwachsende Rente. Gesellen sich dazu noch andere Mittel des Erwerbs, so wird sich damit seine Rente ebenfalls steigern. Gewöhnlich steigert sich der Besitz eines Individuums allmälig. Doch kann es auch schnell geschehen. Tritt dieser Fall ein, so läſst sich derselbe als eine aus vielen durch auf einander folgendes Zusammenwirken entstandene allmälige Zunahme betrachten.

Bezeichnet K den ursprünglichen Besitz einer Person, der durch Anhäufen ununterbrochen dauernder, unendlich-kleiner Zunahmen dx zu der Summe $K+x$ angewachsen ist, so ist die Bedeutung einer solchen Zunahme in Beziehung auf den hieraus hervorgegangenen Gewinn nach (2. §. 44.):

$$\frac{dx}{K+x},$$

und die Bedeutung sämmtlicher Zunahmen, oder der Werth der subjectiven Hoffnung ist

$$1. \quad V = \int \frac{dx}{K+x} = \log(K+x) + C.$$

Für $x = 0$, oder für den ursprünglichen Zustand, ist

$$C = -\log K.$$

Also ist

$$2. \quad V = \log(K+x) - \log K = \log \frac{K+x}{K}.$$

Betrachten wir auf gleiche Weise die Verminderung des ursprünglichen Besitzes K und nehmen an, daſs sich derselbe um x vermindert habe, so ist die Bedeutung der allmäligen Verminderung

$$\frac{dx}{K-x}$$

und die Bedeutung des zu fürchtenden Verlustes ist

$$3. \quad T = \int \frac{dx}{K-x} + C.$$

Dieses giebt, aus den nämlichen Gründen wie vorher:

$$4. \quad T = \log(K-x) - \log K = \log \frac{K-x}{K}.$$

Bei den meisten Unternehmungen, welche auf die Veränderung des Besitzes eines Individuums durch Gewinn oder Verlust einwirken, ist der Erfolg ungewiſs und die Anwendung des Calculs wird dadurch bedingt: denn es soll dann

durch ihn die Bedeutung unsicherer Verhältnisse gewürdigt werden. Bei Unternehmungen, wo die Gewifsheit eines Vortheils oder Nachtheils vor Augen liegt, ist der Calcul überflüssig. Ist aber der Erfog ungewifs und die Aussicht vorhanden, dafs sich der ursprüngliche Besitz eines Individuums um die Gröfse G im Falle des Gelingens vermehren wird, und ist das Zutreffen dieser Aussicht mit der Wahrscheinlichkeit w_1 zu erwarten, so ist der Werth der Erwartung in diesem Falle, oder der muthmafsliche Werth M des erhöhten Besitzes:

$$5. \quad M = w_1 \log \frac{K+G}{G}.$$

Steht das Eintreffen eines Verlustes B mit einer Wahrscheinlichkeit B in Aussicht, so ist die Furcht des verminderten Besitzes, oder der muthmafsliche Werth N des verminderten Besitzes:

$$6. \quad N = w_2 \log \frac{K-B}{K}.$$

Einer von beiden Fällen wird eintreten. Demnach ist der Werth der subjectiven Hoffnung H:

$$7. \quad H = w_1 \log \frac{K+G}{K} + w_2 \log \frac{K-G}{K}.$$

Um nun den Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf den Besitz eines Individuums zu erkennen, wird Folgendes dienen. Es ist bekanntlich, wenn man die obigen Logarithmen in Reihen entwickelt:

$$w_1 \log\left(1+\frac{G}{K}\right) = w_1 \frac{G}{K} - w_1 \frac{G^2}{2K^2} + w_1 \frac{G^3}{3K^3} - w_1 \frac{G^4}{4K^4} + \ldots,$$

$$w_2 \log\left(1-\frac{B}{K}\right) = -w_2 \frac{B}{K} - w_2 \frac{B^2}{2K^2} - w_2 \frac{B^3}{3K^3} - w_2 \frac{B^4}{4K^4} - \ldots$$

Demnach geht (5.) in

$$H = \frac{w_1 G - w_2 B}{K} - \frac{w_1 G^2 + w_2 B^2}{2K^2} + \frac{w_1 G^3 - w_2 B^3}{3K^3} - \ldots$$

über. Im vorliegenden Falle giebt G den Zuwachs des Besitzes, also den zu erwartenden reinen Gewinn. Man kann folglich nach (§. 39.) $G = \frac{w_2 B}{w_1}$ setzen. Dadurch geht der obige Ausdruck in folgenden über:

$$8. \quad H = -w_2\left(1+\frac{w_2}{w_1}\right)\frac{B^2}{2K^2} - w_2\left(1-\frac{w_2^2}{w_1^2}\right)\frac{B^3}{3K^3} - w_2\left(1+\frac{w_2^3}{w_1^3}\right)\frac{B^4}{4K^4} - \ldots$$

Der Werth dieser Reihe wird durch die Beschaffenheit von $\frac{w_2^n}{w_1^n} \cdot \frac{B^{n+1}}{(n+1)K^{n+1}}$ bedingt, wo w_1 und w_2 so unter einander zusammenhangen, dafs $w_1 + w_2 = 1$ ist und B nicht wohl gröfser als K werden kann, wenn nicht Jemand über

fremde Mittel zu gebieten hat, oder auf Credit mehr wagt, als sein Besitz beträgt. Der Werth von $\frac{w_2 B}{w_1 K}$ kann also entweder so grofs, oder kleiner, oder gröfser als die Einheit sein. In den beiden ersten Fällen convergirt die vorstehende Reihe und ihr Werth wird negativ. Im letzten Falle divergirt sie und die Werthe des 2ten, 4ten, 6ten, ... Gliedes in (6.) werden positiv, die des 3ten, 5ten, 7ten, ... negativ. Vergleicht man nun das $2n$te und $(2n+1)$te Glied mit einander, so geben beide zusammen, wegen der Divergenz der Reihe, einen negativen Werth. Daraus folgt, dafs in diesem Falle auch der Werth der ganzen Reihe negativ wird. Diese Bemerkungen führen zu folgenden Sätzen:

9. Bei jeder Unternehmung, wo die Summe B gewagt wird, um einen reinen Gewinn G zu erzielen, findet ein nachtheiliger Einflufs auf den Werth der subjectiven Hoffnung Statt; selbst dann, wenn Einlage und Gewinn zu einander in richtigem Verhältnisse stehen. Dieser Nachtheil ist stärker, wenn auf dem reinen Gewinn ein Abzug lastet; wie bei Lotterien, Spielen u. s. w.

10. Der Nachtheil wird um so kleiner, je kleiner die zu wagende Summe im Verhältnisse zum Besitze und je günstiger die Aussicht auf Gewinn ist; er wird um so gröfser, je gröfser die zu wagende Summe und je ungünstiger die Aussicht ist.

Jedes Spiel, wenn es auch auf ganz richtiger Grundlage beruht, oder wenn es auch hinsichtlich der objectiven Hoffnung mit keinem Nachtheil verbunden sein sollte, übt einen nachtheiligen Einflufs auf den Werth der subjectiven Hoffnung aus und ist deswegen verwerflich. Am meisten verführen hohe Gewinne zum Spiele. Je gröfser der Gewinn, je geringer ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen und desto gröfser ist der auf dem Gewinne lastende Abzug. Gerade in diesem Falle ist der Werth der subjectiven Hoffnung am meisten im Nachtheil.

Diese Bemerkungen haben auf ein ganz anderes Resultat geführt, als diejenigen in (§. 43.). Geht man von den Logarithmen auf die Grundgröfse über, so läfst sich die Gleichung (7.) auch so darstellen:

$$11. \quad H = \left(\frac{K+G}{K}\right)^{w_1}\left(\frac{K-B}{K}\right)^{w_2},$$

oder, wenn $w_1 = \frac{p}{q}$ und $w_2 = \frac{r}{q}$ gesetzt wird:

$$12. \quad H = \sqrt[q]{\left(\left(\frac{K+G}{K}\right)^p \left(\frac{K-B}{K}\right)^r\right)}.$$

Diese Gleichungen beziehen den Werth der subjectiven Hoffnung auf die Einheit. Soll er auf den ursprünglichen Besitz bezogen werden, so ist der Ausdruck in (11. und 12.) von dem Nenner K zu befreien. Dies giebt

$$13.\quad x = (K+G)^{w_1}(K-B)^{w_2} = \sqrt[q]{((K+G)^p(K-G)^r)} \quad \text{und}$$

$$14.\quad x = (K+G)^{w_1}(K-B)^{w_2} < K.$$

Laplace hat den Satz (7.) durch Integralrechnung (Théor. anal. d. probab. pg. 433 und 434) entwickelt. Hier ist er auf eine einfache und dabei etwas allgemeinere Weise gefunden, die zugleich auf den Satz (10.) führt.

Specielle Fälle ergeben sich leicht. Läfst sich Jemand mit einem Besitze von 200 G. auf ein Unternehmen ein, das ihm bei der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Gewinn oder Verlust von 60 G. bringt, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung

$$x = \sqrt{(260.140)} = \sqrt{(36400)} = 190,78784\ldots.$$

Die Ausführung des Unternehmens steht einer Ausgabe von 9,2121.... G. gleich. Ist die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen $\frac{2}{3}$, zu verlieren $\frac{1}{3}$, und können 30 G. gewonnen und 60 verloren werden, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung

$$x = \sqrt[3]{(230^2.140)} = \sqrt[3]{(7406000)} = 194,9221\ldots.\ \text{G.}$$

Sind die Bedingungen umgekehrt, so ist

$$x = \sqrt[3]{(260.140^2)} = \sqrt[3]{(5096000)} = 172,085\ldots.\ \text{G.}$$

Ist aber die Wahrscheinlichkeit 60 G. zu gewinnen $\frac{2}{3}$, die 60 G. zu verlieren $\frac{1}{3}$, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung

$$x = \sqrt[3]{(260^2.140)} = \sqrt[3]{(9464000)} = 211,523\ldots.\ \text{G.}$$

Man sieht, dafs der Werth der subjectiven Hoffnung auch auf Vortheil deuten kann. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $w_1 G > w_2 B$ ist. Dadurch wird die Bedingung, unter welcher die Sätze (9. und 10.) gelten, aufgehoben. Denn sie gelten nur, wenn $w_1 G = w_2 B$ ist. Die Bedingung, dafs $w_1 G > w_2 B$ ist, wird aber selten oder gar nicht vorkommen; es müfste denn Jemand auf den Gedanken fallen, sich seines Besitzes auf die eben bezeichnete Weise entledigen zu wollen.

§. 46.

Die in dem vorigen Paragraph gefundenen Gleichungen geben das Mittel, die Frage zu entscheiden: Ist es vortheilhaft eine Summe S, die im günstigen Fall bei der Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{p}{q}$ gewonnen und im ungünstigen Fall bei der Wahrscheinlichkeit $w_2 = \frac{r}{q}$ verloren werden kann, um deren Besitz oder Nicht-Besitz es sich also handelt, an ein einzelnes Unternehmen zu wagen, oder sie auf mehrere (n), unter den nämlichen Bedingungen des Gelingens und Mifslingens, zu vertheilen?

Der jedem einzelnen Unternehmen zuzuweisende Theil sei $x = \frac{S}{n}$. Die auf einmal zu wagende Summe ist also $S = nx$. Um nun die Frage zu beantworten, ist nöthig, den Werth der subjectiven Hoffnung für beide Fälle zu ermitteln und unter sich zu vergleichen.

Setzt man die Summe auf einmal, so hat man die Aussicht, entweder nx, oder Nichts zu erhalten. Der Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf den Besitz K ist demnach, wenn man die Gleichung (1.) §. 45. nimmt:

$$1. \quad H = w_1 \int \frac{\partial x}{K+nx}.$$

Vertheilt man die Summe $S = nx$ auf n Fälle, so können entweder alle, oder $n-1$, oder $n-2$, ... 3, 2, 1 günstig sein. Man kann also entweder n, oder $n-1$, oder $n-2$, ..., oder 1mal die Summe x, oder Nichts erhalten. Die Wahrscheinlichkeiten, diese Gewinne zu erlangen, sind

$$w_1^n, \quad n w_1^{n-1} w_2, \quad \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^{n-2} w_2^2, \quad \ldots \quad n w_1 w_2^{n-2}.$$

Hieraus ergiebt sich, auf dieselbe Weise wie in (1.), für den Werth der subjectiven Hoffnung in den aufgezählten Fällen:

$$H_1 = w_1^n \int \frac{\partial x}{K+nx} + n w_1^{n-1} w_2 \int \frac{\partial x}{K+(n-1)x} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^{n-2} w_2^2 \int \frac{\partial x}{K+(n-2)x} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n^{n-2|-1}}{1^{n-2|1}} w_1^2 w_2^{n-2} \int \frac{\partial x}{K+2x} + n w_1 w_2^{n-1} \int \frac{\partial x}{K+x},$$

oder, anders ausgedrückt:

$$2. \quad H_1 = w_1 \int \frac{\partial x}{K+nx} \Big[w_1^{n-1} + n w_1^{n-2} w_2 \frac{K+nx}{K+(n-1)x} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^{n-3} w_2^2 \frac{K+nx}{K+(n-2)x} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1 w_2^{n-1} \frac{K+nx}{K+2x} + n w_2^{n-1} \frac{K+nx}{K+x} \Big].$$

Der Werth der in den Klammern (Nr. 2.) eingeschlossenen Reihe ist offenbar größer als $(w_1 + w_2)^{n-1} = 1$, folglich ist auch der Werth von (2.) größer als der von (1.). Dasselbe hätte sich ergeben, wenn man die Ausdrücke (5. und 6. §. 45.) zu Grund gelegt hätte. Für diesen Fall ist der Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf den Besitz K:

3. $H = w_1 \log(K + n x)$ und

4. $H = w_1^n \log(K + n x) + n w_1^{n-1} w_2 \log(K + (n-1) x)$

$$\ldots + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^{n-2} w_2^2 \log(K + (n-2) x) + \ldots$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} w_1^2 w_2^{n-2} \log(K + 2x) + n w_1 w_2^{n-1} \log(K + x).$$

Werden die Ausdrücke (3. und 4.) in Reihen entwickelt, summirt und verglichen, so ergiebt sich auf gleiche Weise, daſs der Werth von (4.) gröſser als der von (3.) ist. Es ist einleuchtend, daſs der Werth von (2.) den von (1.) um so mehr übertrifft, je gröſser n ist. Dies rechtfertigt folgende Behauptung:

5. **Der Werth der subjectiven Hoffnung ist gröſser, wenn eine zu wagende Summe auf mehrere Fälle vertheilt, als wenn sie auf einen einzigen gewagt wird; vorausgesetzt, daſs nach den obigen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit des Gelingens im einzelnen Falle unverändert dieselbe bleibt.**

6. **Der Werth der subjectiven Hoffnung ist um so gröſser, je gröſser die Anzahl der Fälle ist, auf welche die zu wagende Summe vertheilt wird.**

Es ist demnach rathsam, groſse Summen nicht auf einmal zu wagen, und seinen Besitz nicht auf einen Punct zu concentriren. Ein Speculant wird es vorzuziehen haben, seinen Besitz, oder einen groſsen Theil davon, nicht auf einmal aufs Spiel zu setzen, sondern nach einander, oder gleichzeitig, auf verschiedene Weise.

Diese Resultate unterscheiden sich wieder wesentlich von denen in (§. 41.). Der Werth der *objectiven* Hoffnung kennt keinen Unterschied.

Es läſst sich nun auch die Frage entscheiden, ob es rathsam sei, in Assecuranz-Gesellschaften zu treten, um sich durch eine bestimmte Einlage gegen künftigen Schaden zu sichern.

Ist K der Besitz einer Person, welche die Summe S sicher gewinnen kann, wenn sie sich durch Einzahlung der Summe B in eine Versicherungsgesellschaft gegen möglichen Schaden schützt, so ist der künftige sichere Besitz

1. $K + S - B$.

Ist die Aussicht vorhanden, die Summe S mit der Wahrscheinlichkeit w_1 zu gewinnen und mit der Wahrscheinlichkeit $1-w_1=w_2$ zu verlieren, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung nach (7. und 8. §. 45.)

$$2. \quad H = w_1 \log(K+S) + w_2 \log(K-S)$$

oder, nach (10. §. 45.),

$$3. \quad H = \log K + (w_1 - w_2)\frac{S}{K} - (w_1 + w_2)\frac{S^2}{2K^2} + (w_1 - w_2)\frac{S^3}{3K^3} - \ldots.$$

Der Werth von (1.), durch Logarithmen ausgedrückt, ist

$$4. \quad H_1 = \log K + \frac{S-B}{K} - \frac{(S-B)^2}{2K^2)} + \frac{(S-B)^3}{3K^3} - \ldots.$$

Wird der Werth von B nach der Gefahr, die zu versichernde Summe S zu verlieren, bestimmt, so ist nach (3. §. 38.) $B=w_2 S$. Wird dieser Werth statt B in (4.) gesetzt, so geht dieser Ausdruck über in

$$5. \quad H_1 = \log K + \frac{w_1 S}{K} - \frac{w_1^2 S^2}{2K^2} + \frac{w_1^3 S^3}{3K^3} - \ldots.$$

Der Werth von (5.) ist offenbar größer als der von (3.). Es zeigt sich also, daß der Eintritt in Versicherungsgesellschaften zum Schutze gegen möglichen Schaden *vortheilhaft* ist.

§. 47.

So wie der Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf Individuen ermittelt wurde, kann er auch in Beziehung auf Versicherungsgesellschaften, den Theilnehmern gegenüber, untersucht werden.

Das Vermögen einer Gesellschaft sei K, die zu versichernde Summe S; w_1 die Wahrscheinlichkeit, daß das Unternehmen glücklich ausfalle, oder die Einlage zu behalten, $w_2=1-w_1$ die entgegengesetzte, oder die, daß das Unternehmen mißlinge und die Summe ausgezahlt werden müsse. Die Einlage, welche der Einkäufer der Gesellschaft zu zahlen hat, sei $B=w_2 S$; nach dem Maaße der objectiven Hoffnung (3. §. 38.).

Endet das Unternehmen günstig, so kommt die Gesellschaft in den Besitz $K+B=K+w_2 S$. Endet es ungünstig, so hat sie die Summe S zu zahlen und ihr Besitz wird $B-(S-B)=K-(S-w_2 B)=K-w_1 S$. Demnach ist der Werth der subjectiven Hoffnung für die Gesellschaft

$$H = (K+B)^{w_1}(K-(S-B))^{w_2} = (K+w_2 S)^{w_1}(K-w_1 S)^{w_2}.$$

Nun ist unter diesen Voraussetzungen, nach (11. §. 45.), der Werth der subjectiven Hoffnung kleiner als der ursprüngliche Besitz. Soll daher eine Gesell-

schaft nicht zurückkommen, so mufs dieser Unterschied zu der oben bezeichneten Einlage, welche durch die objective Hoffnung bedingt wird, aufgehoben werden. Nennt man diesen Zuschufs D, so ist

$$1.\quad D = K - (K + w_2 S)^{w_1} (K - w_1 S)^{w_2}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Gröfse des Einkaufspreises M:

$$2.\quad M = B + D = w_2 S + K - (K + w_2 S)^{w_1} (K - w_1 S)^{w_2}.$$

Entwickelt man das Product rechts in der Gleichung (1.) in Logarithmen und vergleicht das Resultat der Entwicklung mit $\log K$, so findet sich

$$3.\quad w_1 \log(K + w_2 S) + w_2 \log(K - w_1 S)$$

$$= \log K - \frac{(w_1 w_2^2 + w_2 w_1^2) S^2}{2K^2} + \frac{(w_1 w_2^3 - w_2 w_1^3) S^3}{3K^3} - \frac{(w_1 w_2^4 + w_2 w_1^4) S^4}{4K^4} + \dots$$

Daraus folgt, dafs sich der Werth von $(K + w_2 S)^{w_1} (K - w_1 S)^{w_2}$ der Gröfse K um so mehr nähert, je stärker die Reihe (3.) convergirt. Die Convergenz von (3.) ist bei unverändertem w_1 und w_2 um so gröfser, je gröfser K im Verhältnisse zu S ist. Je näher aber der Werth von $(K + w_2 S)^{w_1} (K - w_1 S)^{w_2}$ der Gröfse K liegt, desto kleiner wird D in (1.) sein. Dies führt zu folgendem Satze:

4. Eine Gesellschaft kann um so leichter die Versicherung einer Summe übernehmen, je gröfser ihr Besitz im Verhältnifs zu der versicherten Summe, oder je kleiner die versicherte Summe ist.

5. Der Einkaufspreis, welchen eine Gesellschaft fordert, kann um so niedriger gestellt werden, je gröfser der Besitz der Versicherungsbank ist.

Für Jeden, der eine bestimmte Summe versichern will, ist es daher vortheilhaft, mit einer Gesellschaft von nicht geringen Mitteln in Verbindung zu treten.

Keine Gesellschaft wird eine Versicherung ohne Aussicht auf Gewinn oder Lohn für ihre Mühe übernehmen. Macht sie denselben von bestimmten Procenten (0,0p) der zu versichernden Summe S abhängig, so ist der Einkaufspreis sammt diesen Procenten:

$$6.\quad M_1 = m + S.0{,}0p = w_2 S + K - (K + w_2 S)^{w_1} (K - w_1 S)^{w_2} + 0{,}0p.S.$$

Die Summe 20 000 z. B. soll bei einer Gesellschaft, die ein Vermögen von 100 000 G. besitzt, versichert werden. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Unternehmen glücklich ausfalle, ist $\frac{1}{2}$. Nach (2.) ist die Gröfse des Einkaufspreises

$$M = 100000 - \sqrt{9900000000} + 10000 = 10502.$$

Hätte die Gesellschaft ein Vermögen von 200000 G., so wäre der Preis nach (2.) 10251.

Endlich kann man fragen, ob es vortheilhafter sei, sich mit Andern zu verbinden, um eine Summe zu wagen, oder ob besser, allein aliquote Theile dieser Summe einzusetzen.

n Personen treten zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung zusammen. Jede giebt das Capital K her, so dafs das Gesammtcapital nK ist. Die Summe S kann mit der Wahrscheinlichkeit w_1 gewonnen und mit $w_2 = 1 - w_1$ verloren werden. Wie grofs ist der Werth der subjectiven Hoffnung für den Einzelnen?

Aus (13. §. 45.) ergiebt sich für den Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf das Gesammt-Capital:

$$H = (nK + S)^{w_1}(nK - S)^{w_2},$$

und hieraus folgt für jeden einzelnen Theilnehmer

$$7. \quad H_1 = \frac{(nK+S)^{w_1}(nK-S)^{w_2}}{n} = \frac{(nK+S)^{w_1}(nK-S)^{w_2}}{n^{w_1}.n^{w_2}}$$
$$= \left(K + \frac{S}{n}\right)^{w_1}\left(K - \frac{S}{n}\right)^{w_2}.$$

Der Werth der subjectiven Hoffnung *einer* Person, die mit einem Capitale K die Summe $\frac{S}{n}$ unter den nämlichen Bedingungen gewinnen oder verlieren kann, ist

$$8. \quad H_1 = \left(K + \frac{S}{n}\right)^{w_1}\left(K - \frac{S}{n}\right)^{w_2}.$$

Es ist also zwischen (7. und 8.) kein Unterschied, und die Verbindung mit mehreren Personen zur Ausführung eines gemeinschaftlichen Unternehmens hat weder Vortheil noch Nachtheil.

Das Zusammentreten zu Gesellschaften kann aber dann einen entschiedenen Vortheil haben, wenn die Mittel des Einzelnen zur Ausführung eines Unternehmens nicht hinreichen. Reichen sie hin, so kann es aus andern leicht begreiflichen Gründen vortheilhaft sein, nicht einer Gesellschaft beizutreten, sondern das Unternehmen allein auszuführen.

§. 48.

Hierher gehört endlich ein Problem, welches *Nicolaus Bernoulli* in einem an *Montmort* gerichteten Briefe vom 9ten Sept. 1713 aufstellte, der in *Montm.* Essai d'anal. s. l. jeux d. haz. II éd. Par. 1704 pg. 401 abgedruckt ist. Es hat die Aufmerksamkeit der Mathematiker erregt. *Dan. Bernoulli* (Comment. Academ. scient. imperial. petropolit. T. V ad annos 1730 et 1731 pg. 181 seqq. specim. theoriae novae d. mensura sortis), *Kramer* (a. a. O. pg. 189), *Laplace*

(Théor. anal. d. probab. pg. 239 3me éd.), *Lacroix* (Wahrscheinlichkeits-Rechnung §. 76.) haben es behandelt. Es ist auch unter dem Namen „Das Petersburger Problem" bekannt (*Lacr.* a. a. O.). Dasselbe wird gegenwärtig unter folgender Form gegeben.

A und *B* spielen mit einander. *A* wirft eine Münze in die Höhe, die mit Kopf und Wappen bezeichnet ist und zahlt an *B* zweimal eine bestimmte Einlage, wenn das Wappen beim ersten Wurfe, viermal wenn es beim zweiten, achtmal wenn es beim dritten Wurfe fällt u. s. w. Welches ist der Werth der Erwartung für *B*, oder wie viel hat er einzulegen, wenn er das Spiel annehmen will? Die Form des Problems, unter welcher *N. Bernoulli* es a. a. O. gab, ist folgende:

IV. Probl. *A* promet de donner un écu à *B*, si avec un dé ordinaire il amène au premier coup six points; deux écus, s'il amène le six au second, trois écus, s'il amène ce point au troisième, et ainsi de suite. On demande: quelle est l'espérance de *B*.

V. Probl. On demande la même chose, si *A* promet à *B*, de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, ... ou 1, 3, 9, 27, ... ou 1, 4, 9, 16, ... ou 1, 8, 27, 64, ... au lieu de 1, 2, 3, 4, ..., comme auparavant.

Die Aufgabe ist nach unserer Ansicht unbestimmt und daher in dieser Form unzulässig, denn sie hat keine bestimmte Bedeutung; wie es bei einer richtig gestellten Aufgabe immer der Fall sein mufs. Es findet eine doppelte Unbestimmtheit Statt, denn es ist nicht angegeben, wie lange das Spiel dauern soll, und nicht angegeben, in welchem Zusammenhange die einzelnen Fälle untereinander stehen. Wie soll aber der Calcul an eine unbestimmte Aufgabe gelegt werden? und wer wird sich in ein Spiel einlassen, dessen Ende unbestimmt ist.

Um diese Frage zu behandeln, ist es nöthig, ihr, dem eben Gesagten gemäfs, einen bestimmten Inhalt zu geben. Wir entnehmen folgende verschiedene Bedeutungen aus ihr:

a) *A* und *B* spielen mit einander. Eine Münze wird $n$mal in die Höhe geworfen. *B* erhält zwei Stücke einer Münze, wenn das Wappen gerade beim ersten, vier wenn es gerade beim zweiten, acht wenn es gerade beim dritten Wurfe u. s. w., 2^n Stücke wenn es gerade beim $n$ten Wurfe fällt. Das Wappen darf nur einmal fallen. Welches ist der Werth der Erwartung?

b) *A* und *B* spielen auf den Wurf einer Münze. *B* erhält zwei Stücke, wenn das Wappen gerade beim ersten, vier wenn es gerade beim zweiten,

acht wenn es gerade beim dritten Wurfe fällt u. s. w. So oft das Wappen fällt, wird ihm die Summe aller zugeordneten Stücke eingehändigt. n Würfe werden gemacht. Welches ist der Werth der Erwartung für B?

c) A und B spielen auf den Wurf einer Münze. B erhält zwei Stücke, wenn das Wappen beim ersten, vier wenn es beim zweiten Wurfe fällt u. s. w., n Würfe werden ausbedungen. Das Spiel endet, wenn das Wappen gefallen ist. Welches ist der Werth der Erwartung für B.

Auflösung der ersten Aufgabe.

Nach dem Sinne dieser Aufgabe werden n Würfe (nicht mehr, nicht weniger) gemacht. n günstige Fälle sind für B möglich. Entweder fällt das Wappen gerade beim ersten, oder gerade beim zweiten u. s. f., oder gerade beim $n$ten Wurfe. Hiebei wird vorausgesetzt, dafs das Wappen weder bei einem frühern, noch bei einem spätern Wurfe fallen werde. Ist nun die Wahrscheinlichkeit, dafs das Wappen beim einzelnen Wurfe fallen werde, $\frac{1}{2}$, so ist die Wahrscheinlichkeit für jeden von den genannten günstigen Fällen $\frac{1}{2^n}$ und der Werth der Erwartung ergiebt sich, wenn der Satz (2. §. 35.) auf jeden einzelnen Fall angewendet wird und die erhaltenen Werthe zusammengezählt werden. Wird der Werth des zu erhaltenden Silberstücks durch G angedeutet, so ist der Werth der Erwartung

$$1. \quad E = \frac{2G}{2^n} + \frac{2^2G}{2^n} + \frac{2^3G}{2^n} + \ldots \frac{2^n}{2^n}.G = 2G - \frac{G}{2^{n-1}}.$$

Auflösung der zweiten Aufgabe.

Es werden n Würfe gemacht und folgende Fälle können eintreten. Das Wappen fällt $n$mal, oder $(n-1)$mal und der Kopf 1mal, oder $(n-2)$mal und der Kopf 2mal u. s. w., oder 1mal und der Kopf $(n-1)$mal.

a) Das Wappen fällt $n$mal. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $\frac{1}{2^n}$. In diesem Falle ist der Gewinn $(2+2^2+2^3+\ldots.2^n)G=(2^{n+1}-2)G$. Der Werth der Erwartung ist

$$E_1 = \frac{2^{n+1}-2}{2^n}.G = 2G - \frac{G}{2^{n-1}}.$$

b) Das Wappen fällt $(n-1)$mal und der Kopf einmal. Letzteres kann beim ersten, zweiten oder dritten Wurfe u. s. w. geschehen. Die Gewinne fehlen der Reihe nach einmal. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Fälle sind gleich, und $\frac{1}{2^n}$. Demnach ist der Werth der Erwartung

$$E_2 = \frac{1}{2^n}(n-1)(2^{n+1}-2)G = (n-1)2G - \frac{(n-1)G}{2^{n-1}}.$$

c) Das Wappen fällt $(n-2)$mal und der Kopf zweimal. Die Wahrscheinlichkeiten sind auch hiefür $\frac{1}{2^n}$. Je zwei Gewinne fehlen. Es kommt daher jeder Gewinn so oft vor, als sich zwei Gewinne in $n-1$ Fächer vertheilen lassen. Danach ist der Werth der Erwartung

$$E_3 = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} (2^{n+1} - 2) = \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} 2G - \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{G}{2^{n-1}}.$$

Wird diese Schlufsweise weiter fortgesetzt, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$$E = G\left[2 + (n-1)2 + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} 2 + \frac{(n-1)^{3|-1}}{1^{3|1}} 2 + \ldots \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}}\right]$$

$$- G\left[\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}2^{n-1}} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}}\right].$$

Reducirt man das in diesen Reihen enthaltene Binomium, so ergiebt sich für den Werth der Erwartung

$$2. \quad E = (2^n - 1)G.$$

Diese Aufgabe läfst sich auch auf nachstehende ganz einfache Weise lösen, wenn folgende, mit ihr gleich geltende Aufgabe an ihre Stelle gesetzt wird.

B spielt mit *n* Personen, und zwar mit jeder besonders. Mit A_1 unter der Bedingung, zwei Stücke ($2G$) zu erhalten, wenn das Wappen fällt, von A_2 vier, von A_3 acht u. s. w. *B* wirft eine Münze für jede Person, also $n$mal in die Höhe; der erste Wurf gilt für A_1, der zweite für A_2 u. s. w. Ehe das Spiel beginnt, soll jeder seine Einlage aussetzen und *B* die seinige ihr entgegen. Wie viel hat jeder Theilnehmer und wie viel hat *B* Allen zusammen entgegen zu setzen?

Die Wahrscheinlichkeit, im einzelnen Falle zu gewinnen, ist $\frac{1}{2}$, wenn *ein* Theilnehmer zum Spiele gelangt ist. Das Gelangen zum Spiele unterliegt keinen Zweifel. Die Gröfse der Einlage findet sich nach (2. §. 25.). Alle Theilnehmer zusammen machen daher die Einlage

$$3. \quad E = \tfrac{1}{2}(2G + 2^2G + 2^3G + 2^4G + \ldots 2^nG) = (2^n - 1)G.$$

Die gleiche Einlage hat *B* entgegenzustellen. Sie kommt mit dem Werthe seiner Erwartung überein. Die Gleichungen (2. und 3.) geben einerlei Resultat.

Auflösung der dritten Aufgabe.

Nach den Bedingungen der dritten Aufgabe kann nur einmal gewonnen werden, und zwar entweder im 1ten, oder im 2ten, oder 3ten Wurfe u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit, in einem *bestimmten* Wurfe zu gewinnen, setzt vor-

aus, dafs in keinem der vorhergehenden gewonnen wurde. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{2^n}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht nach (2. §. 35) für den Werth der Erwartung für *B:*

$$4.\qquad E = \frac{2G}{2} + \frac{2^2 G}{2^2} + \frac{2^3 G}{2^3} + \ldots\ldots \frac{2^n G}{2^n} = nG.$$

Die Probleme (*a, b, c*) gelten, wenn $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ ist. Sie lassen sich leicht ins Allgemeine und auf den Fall ausdehnen, wenn $w_1 = 1 - w_2$ ist. Es ergeben sich dann aus (1., 2. und 4.) folgende Ausdrücke:

$$5.\qquad E = w_1 w_2^{n-1}(G_1 + G_2 + G_3 + \ldots\ldots G_n),$$

$$6.\qquad E = w_1(G_1 + G_2 + G_3 + \ldots\ldots G_n),$$

$$7.\qquad E = w_1(G_1 + w_2 G_2 + w_2^2 G_3 + w_2^3 G_4 \ldots\ldots + w_2^{n-1} G_n).$$

Hier haben G_1, G_2, G_3, ... G_n ganz willkürliche Werthe.

Diese Erörterungen werden gezeigt haben, inwiefern das von *N. Bern.* aufgestellte Problem unbestimmt und unzuläfslich genannt werden kann. Drei Fälle wurden aus ihm abgeleitet, deren jeder einen bestimmten Inhalt und Bedeutung hatte. Welches ist nun der richtige? Keine Bemerkung ist im Probleme enthalten, woraus sich dies entscheiden liefse. *Bern.* selbst hat keine Auflösung gegeben, woraus es gefolgert werden könnte. Vielleicht hat er den Fall (*c*) im Auge gehabt. Danach hat wenigstens *Kramer* a. a. O. die Aufgabe behandeln zu müssen geglaubt; er liefs jedoch die Beschränkung auf eine bestimmte Zahl von Versuchen aufser Acht. Da er jedoch die Nothwendigkeit davon fühlte, so wollte er die Vorfrage erörtern, nach welchem Versuche das Spiel geendet sein würde, übersah aber dabei den Begriff und Zweck der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche die Frage nie zur Entscheidung bringen kann. Er nahm für die wahrscheinliche Dauer des Spieles 24 Würfe an. Dieser Annahme, die ganz willkürlich ist, könnte die Laune des Zufalls mit Erfolg spotten. Zudem pafst die Annahme nur für den besondern Fall (4.), nicht für den allgemeinen (7.). *Dan. Bern.* nimmt die Zahl der Würfe unendlich grofs an. Dies thut auch *Laplace,* bemerkt jedoch, dafs Niemand von einiger Überlegung eine auch nur mäfsige Summe in einem solchen Spiele wagen und die Rolle des Gebers übernehmen werde. Alle, welche die Aufgabe behandelten, fanden Ungereimtes in ihr, und wohl nur aus dem Grunde, weil es in ihr liegt. Die Unbestimmtheit fällt weg, wenn man die Bemerkungen (*a, b, c*) beachtet. Nimmt man die Zahl der Würfe in (*c*) sehr grofs, oder gar unendlich grofs

an, so müfste der Spieler B 32768 G erhalten, wenn er gerade im 15ten, 65536 G, wenn er gerade im 16ten Wurfe gewänne u. s. w. Wäre die Zahl der Würfe unbegrenzt, so wäre $n = \infty$ und der Werth der Erwartung oder die Einlage von B wäre

$$8. \quad E = \infty G,$$

aber Niemand könnte eine unendlich grofse Summe als Einlage bieten.

Diese Bemerkungen gelten nicht blofs von der *objectiven*, sondern auch von der *subjectiven* Hoffnung. Man betrachte zuerst den Werth der subjectiven Hoffnung von A (dem Gegner von B) für den Fall wo n Würfe gemacht werden.

Um diesen Werth zu finden, ist zu bemerken, dafs die Einlage, welche B zu machen hat, dem Werthe seiner objectiven Hoffnung nG gleichkommt. Der hieraus sich ergebende Besitz von A ist $K+nG$. Wird nun geworfen, so kann A im ersten, zweiten oder dritten Wurfe u. s. w., oder auch gar nicht verlieren. Danach ist der Werth der subjectiven Hoffnung

$$9. \quad H = (K-2G)^{\frac{1}{2}}(K-2^2G)^{\frac{1}{2^2}}(K-2^3G)^{\frac{1}{2^3}}\ldots(K-2^nG)^{\frac{1}{2^n}}(K+nG)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Die Aufgabe hat also einen Sinn, so lange $K-2^kG>0$ ist. Wird dagegen $K-2^kG$ eine negative Gröfse, so ist der Werth von (9.) imaginär, denn

$$\sqrt[2^k]{(K-2^kG)}$$

ist in diesem Fall imaginär und die Aufgabe ist ungereimt. Aus (9.) zeigt sich, dafs das Spiel für A unter jeder Bedingung nachtheilig und bei unendlich grofsem n, oder bei unbestimmter Fortsetzung, unmöglich ist. Das Spiel ist um so weniger nachtheilig, je kleiner n ist. So ist der Werth der subjectiven Hoffnung für A, wenn $n=1$, $K=100$ ist, $H=99{,}4887\ldots$; für $n=2$ ist $H=98{,}476\ldots$

Der Werth der subjectiven Hoffnung für B ist, wenn er die Einlage nG gemacht hat, da er entweder im ersten, oder zweiten, oder dritten u. s. w., oder $n$ten Wurfe, oder auch gar nicht gewinnen kann:

$$10. \quad H = (K-nG+2G)^{\frac{1}{2}}(K-nG-2^2G)^{\frac{1}{4}}\ldots(K-nG+2^nG)^{\frac{1}{2^n}}(K-nG)^{\frac{1}{2^n}}$$
$$= K\Big(1-\frac{n-2}{K}G\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(1-\frac{n-2^2}{K}G\Big)^{\frac{1}{4}}\ldots\Big(1-\frac{n-2^n}{K}G\Big)^{\frac{1}{2^n}}\Big(1-\frac{nG}{K}\Big)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Vergleicht man hier die Werthe zweier Nachbarglieder, so findet sich

$$(K-nG+2^kG)^{\frac{1}{2^k}}:(K-nG+2^{k+1}G)^{\frac{1}{2^{k+1}}}.$$

Werden beide in die 2^{k+1} Potenz erhoben, so ergiebt sich

$$(K-nG+2^k)^2:(K-nG+2^{k+1}G)$$
$$=(K-nG)^2+2(K-nG)2^kG+2^{2k}G^2:K-nG+2^{k+1}G,$$

und es zeigt sich, dafs die Werthe der Glieder abnehmen. Der Werth von (10.) ist so lange möglich, als $1-\frac{nG}{K}>0$ ist. Wird $\frac{nG}{K}>1$, so liegt in der Aufgabe eine Unmöglichkeit.

Berechnet man in (10.) den Werth der subjectiven Hoffnung für B, so findet sich, wenn $K=100$ und $n=1$ ist, $H=99{,}995\ldots$; für $n=2$ ist $H=99{,}9900\ldots$; für $n=3$ ist $H=99{,}9753\ldots$. Man sieht hieraus, dafs unter gleichen Bedingungen dies Spiel für den Bankhalter viel nachtheiliger ist, als für den Spieler.

Mit diesen Erörterungen stimmen theilweise die Bemerkungen überein, welche *Fries* in seiner Critik der Principien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung (Braunschweig 1842) macht. Doch dürften die von ihm aufgestellten Behauptungen nicht allgemein und überall gelten; denn sonst würden die nämlichen Bemerkungen auch gegen den Begriff der mathematischen Hoffnung gerichtet werden können. Aus ihr können zuletzt auch nur leitende Rathschläge gegeben werden, und es ist auch hier zu merken, dafs zu weit geführte Schlüsse nicht immer das Richtige geben.

Bemerkung zu §. 8.

Die in diesem Paragraph mitgetheilten Formeln für die Summen der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen aus jeder Art von Elementen, welche in der angeführten Schrift entwickelt sind, beruhen zum Theil selbst wieder auf der Darstellung der Summen-Ausdrücke für die Verbindungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... q. Für diese ist daher eine unabhängige Darstellung nöthig. Eine solche ist, aufser den angegebenen, schon in meinem Differenzen-Calcul S. 224 u. ff. gegeben, die sich ganz besonders zur leichten Darstellung der erforderlichen Summen-Ausdrücke eignet. Da sie dort in einer nicht ganz zweckmäfsigen Form gegeben ist, so stellen wir sie unter folgender zweckmäfsigeren auf:

$$1.\qquad SC'(1,2,\ldots q)^m\,\frac{1^{m+q|1}}{1^{q|1}}\,P'\Big(s(m+q);\,\frac{1}{1^{1|1}},\,\frac{1}{1^{2|1}},\,\frac{1}{1^{3|1}},\,\ldots\,\frac{1}{1^{m+1|1}}\Big)^q.$$

Hiebei ist zu bemerken, dafs die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe $(m+q)$ in der $q$ten Classe aus den angedeuteten Facultäten, deren Exponenten als Elemente dienen, gebildet werden müssen. Die vorliegende Aufgabe

scheint eine unbestimmte zu sein, ist es aber nicht, wenn man den in 32. S. 28 der Comb. Lehre aufgestellten Satz in Anwendung bringt, dann die Versetzungen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe auf die Verbindungen mit Wiederholungen zu verschiedenen Summen zurückführt und die Anzahl der Versetzungen, wie oft die fraglichen Wiederholungen vorkommen sollen, angiebt. Die hiedurch nöthig werdenden Untersuchungen und Veränderungen führen zu folgendem entwickelten, ganz allgemeinen Ausdruck:

$$2.\qquad SC'(1,2,\ldots q)^m$$

$$= (q+1)^{m|1}\Big[\frac{q}{1^{m+1|1}} + q^{2|-1}\Big(\frac{1}{1^{m|1}.1^{2|1}} + \frac{1}{1^{m-1|1}.1^{3|1}} + \frac{1}{1^{m-2|1}.1^{4|1}} + \ldots\Big)$$

$$+ q^{3|-1}\Big(\frac{1}{1^{m-1|1}1^{2|1}1^{2|1} \times 1^{2|1}} + \frac{1}{1^{m-2|1}1^{3|1}1^{2|1}} + \frac{1}{1^{m-3|1}1^{4|1}1^{2|1}} + \ldots\Big)$$

$$+ q^{4|-1}\Big(\frac{1}{1^{m-2|1}1^{2|1}1^{2|1}1^{2|1} \times 1^{3|1}} + \frac{1}{1^{m-3|1}1^{3|1}1^{2|1}1^{2|1} \times 1^{2|1}} + \ldots\Big)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ q^{m-1|-1}\frac{1}{1^{3|1}(1^{2|1})^{m-2} \times 1^{m-2|1}}$$

$$+ q^{m|-1}\frac{1}{(1^{2|1})^m \times 1^{m|1}}.$$

Hier sind die Verbindungen mit Wiederholungen zur 1ten, 2ten, 3ten, ... $m$ten Classe aus den Elementen $\frac{1}{1^{2|1}}, \frac{1}{1^{3|1}}, \frac{1}{1^{4|1}}, \ldots \frac{1}{1^{m+1|1}}$ nöthig; der Reihe nach zur Summe $m+1$, $m+2$, $m+3$, ... $2m$. Kommt eine Facultät mit dem nämlichen Exponenten mehreremal vor, so mufs dies bei dem Aufzählen der Anzahl der Versetzungen in Rechnung gebracht werden. Dies ist durch das Zeichen $(\times)$ geschehen. Setzt man nun der Reihe nach 1, 2, 3, ... statt m in (2.), so hat man, ohne alle schwierige Rechnung oder grofse Vorbereitung, folgende Ausdrücke:

$$3.\quad \begin{cases} SC'(1,2,3,\ldots q)^1 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^2 = [1+\frac{3}{4}(q-1)]\frac{q^{3|1}}{1^{3|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^3 = [1+2(q-1)+\frac{1}{2}(q-1)^{2|-1}]\frac{q^{4|1}}{1^{4|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^4 = [1+\frac{25}{6}(q-1)+\frac{5}{2}(q-1)^{2|-1}+\frac{5}{16}(q-1)^{3|-1}]\frac{q^{5|1}}{1^{5|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^5 = [1+8(q-1)+\frac{35}{4}(q-1)^{2|-1}+\frac{5}{2}(q-1)^{3|-1}+\frac{3}{16}(q-1)^{4|-1}]\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}}, \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} SC'(1,2,3,\ldots q)^6 = \left[1+\frac{119}{8}(q-1)+\frac{969}{36}(q-1)^{2|-1}+\frac{105}{8}(q-1)^{3|-1}+\frac{35}{6}(q-1)^{4|-1} \right. \\ \qquad \left. \frac{7}{64}(q-1)^{5|-1}\right]\frac{q^{7|1}}{1^{7|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^7 = \left[1+\frac{82}{3}(q-1)+\frac{455}{6}(q-1)^{2|-1}+\frac{518}{9}(q-1)^{3|-1}+\frac{385}{24}(q-1)^{4|-1} \right. \\ \qquad \left. +\frac{7}{4}(q-1)^{5|-1}+\frac{1}{16}(q-1)^{6|-1}\right]\frac{q^{8|1}}{1^{8|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^8 = \left[1+\frac{501}{10}(q-1)+\frac{417}{2}(q-1)^{2|-1}+\frac{5509}{24}(q-1)^{3|-1}+\frac{763}{8}(q-1)^{4|-1} \right. \\ \qquad \left. +\frac{273}{16}(q-1)^{5|-1}+\frac{21}{16}(q-1)^{6|-1}+\frac{9}{256}(q-1)^{7|-1}\right]\frac{q^{9|1}}{1^{9|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^9 = \left[1+92(q-1)+563(q-1)^{2|-1}+\frac{2645}{3}(q-1)^{3|-1}+\frac{6055}{12}(q-1)^{4|-1} \right. \\ \qquad \left. +\frac{388}{3}(q-1)^{5|-1}+\frac{945}{32}(q-1)^{6|-1}+\frac{15}{16}(q-1)^{7|-1}+\frac{5}{256}(q-1)^{8|-1}\right]\frac{q^{10|1}}{1^{10|1}} \end{cases}$$

u. s. w., oder in einer andern Entwicklung:

$$4.\begin{cases} SC'(1,2,3,\ldots q)^1 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^2 = \frac{3q+1}{4}\cdot\frac{q^{3|1}}{1^{3|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^3 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{q^{4|1}}{1^{4|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^4 = \frac{15q^3+30q^2+5q-2}{48}\cdot\frac{q^{6|1}}{1^{5|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^5 = \frac{3q^4+10q^3+5q^2-2q}{16}\cdot\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^6 = \frac{63q^5+315q^4+315q^3-91q^2-42q+16}{1^{4|1}\,1^{4|1}}\cdot\frac{q^{7|1}}{1^{7|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^7 = \frac{9q^6+63q^5+105q^4-7q^3-42q+16q}{1^{3|1}\,1^{4|1}}\cdot\frac{q^{8|1}}{1^{8|1}}, \\ SC'(1,2,3,\ldots q)^8 = \frac{135q^7+1260q^6+3150q^5+840q^4-2345q^3+540q^2+404q-144}{1^{5|1}\,2^6}\cdot\frac{q^{9|1}}{1^{9|1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wir theilen jetzt folgenden, für die Summirung der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen wichtigen Satz mit, der sich aus der Vergleichung der in meinen „Forschungen in der Analysis" aufgefundenen, hierhergehörigen Gleichungen ergiebt, und der sich aufserdem auch auf eine ganz einfache Art beweisen läfst. Es ist nämlich

$$5.\quad SC(1,2,3,\ldots q-1)^m = SC'(1,2,3,\ldots q)^m,$$

wenn auf der einen Seite $(-q)$ statt $(+q)$ gesetzt wird. Dieser Satz bezieht sich nicht etwa auf die Ableitung oder Entwicklung der Verbindungen, son-

dern auf die für sie gefundenen Summen-Ausdrücke, und ist reciprok. Er hat folgende Bedeutung:

6. Ist der Summen-Ausdruck für die Verbindungen mit Wiederholungen aus q Elementen zu irgend einer Classe gefunden, so ergiebt sich derjenige für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus $(q-1)$ Elementen zur nämlichen Classe, wenn darin $(-q)$ statt $(+q)$ gesetzt wird; und umgekehrt.

7. Ist der Summen-Ausdruck für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus $(q-1)$ Elementen zu irgend einer Classe gefunden, so ergiebt sich der Ausdruck für die Verbindungen mit Wiederholungen aus q Elementen zur nämlichen Classe, wenn darin $(-q)$ statt $(+q)$ gesetzt wird.

Hiernach ist es nur nöthig, den Summen-Ausdruck für die eine Art dieser Verbindungen aufzusuchen, weil dadurch zugleich der für die andere Art gegeben ist. Wenden wir das Gesagte auf die in (3. und 4.) gefundenen Ausdrücke an, so findet sich:

$$
8.\quad \begin{cases}
SC(1,2,\ldots. q-1)^1 = \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}, \\
SC(1,2,\ldots. q-1)^2 = \left[-1+\frac{3}{4}(q+1)\right]\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}, \\
SC(1,2,\ldots. q-1)^3 = \left[1-2(q+1)+\frac{(q+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\right]\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}, \\
SC(1,2,\ldots. q-1)^4 = \left[-1+\frac{25}{6}(q+1)-\frac{5}{2}(q+1)^{2|1}+\frac{5}{16}(q+1)^{3|1}\right]\frac{q^{5|-1}}{1^{5|1}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

$$
9.\quad \begin{cases}
SC(1,2,\ldots. q-1)^1 = \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}, \\
SC(1,2,\ldots. q-1)^2 = \frac{3}{4}(q-1)\cdot\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}, \\
SC(1,2,\ldots. q-1)^3 = \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}, \\
SC(1,2,\ldots. q-1)^4 = \frac{15q^3-30q^2+5q+2}{1^{2|1}\,1^{4|1}}\cdot\frac{q^{5|-1}}{1^{5|1}}, \\
SC(1,2,\ldots. q-1)^5 = \frac{3q^4-10q^3+5q^2+2q}{16}\cdot\frac{q^{6|-1}}{1^{6|1}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen haben eine vielseitige Anwendung in der Analysis und verdienen deswegen Aufmerksamkeit. Wir gedenken, um dies zu zeigen, ein andermal auf sie zurückzukommen.

Wir theilen noch eine zurücklaufende Bildungsweise mit; besonders auch weil sie sich so einfach ergiebt. Es ist bekanntlich

$$10.\quad SC(1,2,\ldots q)^m = q\,SC(1,2,\ldots q-1)^{m-1} + (q-1)\,SC(1,2,\ldots q-2)^{m-1} + (q-2)\,SC(1,2,\ldots q-3)^{m-1} + \ldots$$

Bezeichnen wir den Summen-Ausdruck für diese Verbindungen zur $x$ten Classe durch $f(q^x)$, so ist aus (10.)

$$11.\quad SC(1,2,\ldots q)^m = \Sigma q.f((q-1)^{m-1}).$$

Zur Auffindung der nöthigen Summen-Ausdrücke benutzen wir folgende Gleichung, die sich leicht rechtfertigen läfst:

$$12.\quad \Sigma(R+q)\frac{q^{n|1}}{1^{n|1}} = (R+1)\frac{q^{n+1|1}}{1^{n+1|1}} + (n+1)\frac{(q-1)^{n+2|1}}{1^{n+2|1}}.$$

Nun ist bekanntlich $SC(1,2,\ldots q)^1 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}$, also nach (10. und 11.)

$$SC(1,2,3,\ldots q)^2 = \Sigma q\cdot\frac{(q-1)^{2|1}}{1^{2|1}}.$$

Wird $q-1$ statt q, $R=1$ und $n=2$ in (12.) gesetzt, so ergiebt sich

$$SC(1,2,3,\ldots q)^2 = 2\cdot\frac{(q-1)^{3|1}}{1^{3|1}} + 3\cdot\frac{(q-2)^{4|1}}{1^{4|1}}.$$

Aus (11.) erhält man

$$SC(1,2,3,\ldots q)^3 = 2\Sigma q\cdot\frac{(q-2)^{3|-1}}{1^{3|1}} + 3\Sigma q\cdot\frac{(q-3)^{4|1}}{1^{4|1}}.$$

Wird $q-2$ statt q, $R=2$, $n=3$, dann $q-3$ statt q, $R=3$, $n=4$ in (3.) gesetzt, so entstehen vier Ausdrücke und es ist

$$SC(1,2,3,\ldots q)^3 = 2\cdot3\cdot\frac{(q-2)^{4|1}}{1^{4|1}} + \frac{4\cdot2}{4\cdot3}\Big|\frac{(q-3)^{5|1}}{1^{5|1}} + 5\cdot3\cdot\frac{(q-4)^{6|1}}{1^{6|1}}$$

$$= 6\cdot\frac{(q-2)^{4|1}}{1^{4|1}} + 20\cdot\frac{(q-3)^{5|1}}{1^{5|1}} + 15\cdot\frac{(q-4)^{6|1}}{1^{6|1}}.$$

Wird in dieser Weise fortgefahren, so läfst sich leicht das Gesetz für die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen erkennen. Das Gesetz für die Facultäten liegt klar vor. Die Ableitung der $r$ten Vorzahl in der $m$ten Classe ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$13.\quad A_r^m = (m+r-1)(A_{r-1}^{m-1} + A_r^{m-1}).$$

Hieraus gewinnt man folgende Darstellungen:

$$14.\quad \begin{cases} SC(1,2,\ldots q)^4 = 24\cdot\frac{(q+1)^{5|-1}}{1^{5|1}} + 130\cdot\frac{(q+1)^{6|-1}}{1^{6|1}} + 210\cdot\frac{(q+1)^{7|-1}}{1^{7|-1}} + 105\cdot\frac{(q+1)^{8|-1}}{1^{8|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q)^5 = 120\cdot\frac{(q+1)^{6|-1}}{1^{6|1}} + 924\cdot\frac{(q+1)^{7|-1}}{1^{7|1}} + 2380\cdot\frac{(q+1)^{8|-1}}{1^{8|1}} \\ \qquad + 2520\cdot\frac{(q+1)^{9|-1}}{1^{9|1}} + 945\cdot\frac{(q+1)^{10|-1}}{1^{10|1}}, \end{cases}$$

$$14.\begin{cases} SC(1,2,\ldots q)^6 = 720\cdot\frac{(q+1)^{7|-1}}{1^{7|1}} + 7308\cdot\frac{(q+1)^{8|-1}}{1^{8|1}} + 26432\cdot\frac{(q+1)^{9|-1}}{1^{9|1}} \\ \qquad + 44100\cdot\frac{(q+1)^{10|-1}}{1^{10|1}} + 34658\cdot\frac{(q+1)^{11|-1}}{1^{11|1}} + 10395\cdot\frac{(q+1)^{12|-1}}{1^{12|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q)^7 = 5040\cdot\frac{(q+1)^{8|-1}}{1^{8|1}} + 64224\cdot\frac{(q+1)^{9|-1}}{1^{9|1}} + 303660\cdot\frac{(q+1)^{10|-1}}{1^{10|1}} \\ \qquad + 705320\cdot\frac{(q+1)^{11|-1}}{1^{11|1}} + 866250\cdot\frac{(q+1)^{12|-1}}{1^{12|1}} \\ \qquad + 540540\cdot\frac{(q+1)^{13|-1}}{1^{13|1}} + 135135\cdot\frac{(q+1)^{14|-1}}{1^{14|1}}, \\ SC(1,2,\ldots q)^8 = 40320\cdot\frac{(q+1)^{9|-1}}{1^{9|1}} + 623376\cdot\frac{(q+1)^{10|-1}}{1^{10|1}} + 3678840\cdot\frac{(q+1)^{11|-1}}{1^{11|1}} \\ \qquad + 11098780\cdot\frac{(q+1)^{12|-1}}{1^{12|1}} + 18858840\cdot\frac{(q+1)^{13|-1}}{1^{13|1}} + 18288270\cdot\frac{(q+1)^{14|-1}}{1^{14|1}} \\ \qquad + 9459450\cdot\frac{(q+1)^{15|-1}}{1^{15|1}} + 2027025\cdot\frac{(q+1)^{16|-1}}{1^{16|1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nach (5.) ergiebt sich hieraus unmittelbar für die Summen der Verbindungen mit Wiederholungen:

$$15.\begin{cases} SC'(1,2,\ldots q)^1 = +\frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}, \\ SC'(1,2,\ldots q)^2 = -2\cdot\frac{q^{3|1}}{1^{3|1}} + 3\cdot\frac{q^{4|1}}{1^{4|1}}, \\ SC'(1,2,\ldots q)^3 = +6\cdot\frac{q^{4|1}}{1^{4|1}} - 20\cdot\frac{q^{5|1}}{1^{5|1}} + 15\cdot\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}}, \\ SC'(1,2,\ldots q)^4 = -24\cdot\frac{q^{5|1}}{1^{5|1}} + 130\cdot\frac{q^{6|1}}{1^{6|1}} - 210\cdot\frac{q^{7|1}}{1^{7|1}} + 105\cdot\frac{q^{8|1}}{1^{8|1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Eben so leicht lassen sich nach der nämlichen Methode die Summen-Ausdrücke für die Verbindungen ohne Wiederholungen finden. Für diese Verbindungen gilt bekanntlich folgende zurücklaufende Bildungsweise:

$$16.\quad SC'(1,2,\ldots q)^m = q\,SC'(1,2,\ldots q)^{m-1} + (q-1)\,SC'(1,2,\ldots q-1)^{m-1} + (q-2)\,SC'(1,2,\ldots q-2)^{m-1} + \ldots,$$

also auch

$$17.\quad SC'(1,2,\ldots q)^m = \Sigma q.f(q^m).$$

Werden nun die gehörigen Werthe statt q, R und n nach (16. und 17.) in (12.) bei jedem besondern Falle eingeführt, so ergeben sich, nach gehöriger Ordnung und Reduction, folgende Summen-Ausdrücke:

$$18. \left\{ \begin{aligned}
&SC'(1,2,\ldots.q)^1 = \frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}, \\
&SC'(1,2,\ldots.q)^2 = \frac{q^{3|1}}{1^{3|1}} + 3\cdot\frac{(q-1)^{4|1}}{1^{4|1}}, \\
&CS'(1,2,\ldots.q)^3 = \frac{q^{4|1}}{1^{4|1}} + 10\cdot\frac{(q-1)^{5|1}}{1^{5|1}} + 15\cdot\frac{(q-2)^{6|1}}{1^{6|1}}, \\
&SC'(1,2,\ldots.q)^4 = \frac{q^{5|1}}{1^{5|1}} + 25\cdot\frac{(q-1)^{6|1}}{1^{6|1}} + 105\cdot\frac{(q-2)^{7|1}}{1^{7|1}} + 105\cdot\frac{(q-3)^{8|1}}{1^{8|1}}, \\
&SC'(1,2,\ldots.q)^5 = \frac{q^{6|1}}{1^{6|1}} + 56\cdot\frac{(q-1)^{7|1}}{1^{7|1}} + 490\cdot\frac{(q-2)^{8|1}}{1^{8|1}} + 1260\cdot\frac{(q-3)^{9|1}}{1^{9|1}} \\
&\qquad\qquad + 945\cdot\frac{(q-4)^{10|1}}{1^{10|1}}, \\
&SC'(1,2,\ldots.q)^6 = \frac{q^{7|1}}{1^{7|1}} + 119\cdot\frac{(q-1)^{8|1}}{1^{8|1}} + 1918\cdot\frac{(q-2)^{9|1}}{1^{9|1}} + 9450\cdot\frac{(q-3)^{10|1}}{1^{10|1}} \\
&\qquad\qquad + 17325\cdot\frac{(q-4)^{11|1}}{1^{11|1}} + 10395\cdot\frac{(q-5)^{12|1}}{1^{12|1}}, \\
&SC'(1,2,\ldots.q)^7 = \frac{q^{8|+1}}{1^{8|1}} + 246\cdot\frac{(q-1)^{9|1}}{1^{9|1}} + 6825\cdot\frac{(q-2)^{10|1}}{1^{10|1}} + 56980\cdot\frac{(q-3)^{11|+1}}{1^{11|1}} \\
&\qquad\qquad + 190575\cdot\frac{(q-4)^{12|1}}{1^{12|1}} + 270270\cdot\frac{(q-5)^{13|1}}{1^{13|1}} + 135135\cdot\frac{(q-6)^{14|1}}{1^{14|1}}, \\
&SC'(1,2,\ldots.q)^8 = \frac{q^{9|1}}{1^{9|1}} + 501\cdot\frac{(q-1)^{10|1}}{1^{10|1}} + 22935\cdot\frac{(q-2)^{11|1}}{1^{11|1}} + 302995\cdot\frac{(q-3)^{12|1}}{1^{12|1}} \\
&\qquad\qquad + 1636635\cdot\frac{(q-4)^{13|1}}{1^{13|1}} + 4099095\cdot\frac{(q-5)^{14|1}}{1^{14|1}} \\
&\qquad\qquad + 4729725\cdot\frac{(q-6)^{15|1}}{1^{15|1}} + 2027025\cdot\frac{(q-7)^{16|1}}{1^{16|1}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.$$

Wird auch hierauf der Satz (5.) angewendet, so ergiebt sich

$$19. \left\{ \begin{aligned}
&SC(1,2,\ldots.q-1)^1 = +\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}, \\
&SC(1,2,\ldots.q-1)^2 = -\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} + 3\cdot\frac{(q+1)^{4|-1}}{1^{4|1}}, \\
&SC(1,2,\ldots.q-1)^3 = +\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}} - 10\cdot\frac{(q+1)^{5|-1}}{1^{5|1}} + 15\cdot\frac{(q+2)^{6|-1}}{1^{6|1}}, \\
&SC(1,2,\ldots.q-1)^4 = -\frac{q^{5|-1}}{1^{5|1}} + 25\cdot\frac{(q+1)^{6|-1}}{1^{6|1}} - 105\cdot\frac{(q+2)^{7|-1}}{1^{7|1}} + 150\cdot\frac{(q+3)^{8|-1}}{1^{8|1}}, \\
&SC(1,2,\ldots.q-1)^5 = +\frac{q^{6|-1}}{1^{6|1}} - 56\cdot\frac{(q+1)^{7|-1}}{1^{7|1}} + 490\cdot\frac{(q+2)^{8|-1}}{1^{8|1}} \\
&\qquad\qquad - 1260\cdot\frac{(q+3)^{9|-1}}{1^{9|1}} + 945\cdot\frac{(q+4)^{10|-1}}{1^{10|1}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.$$

Die in (14. und 18.) entwickelten Gleichungen, und aufserdem noch zwei unabhängige Bildungsweisen für die Summen der Verbindungen, hat *Kramp* in seiner „Analyse d. réfract. pg. 84 u. ff." mitgetheilt. Letztere sind von geringer Brauchbarkeit, weil sie für jeden besondern Fall auch eine besondere Auflösung nöthig haben. Die in No. 14. bis 18. mitgetheilten Formeln haben bei höhern Classen sehr grofse Coëfficienten nöthig; wodurch sie selbst wieder unbrauchbar werden und in jedem Fall den in (3, 4, 8 und 9) mitgetheilten Ausdrücken, wie man sich leicht überzeugt, nachstehen. Der Satz (5.) läfst sich auch noch auf die übrigen in meiner Comb. Lehre gegebenen Formeln anwenden; und überhaupt auf die in den Schriften Anderer, wie in der Analysis von *Eytelwein* u. a., entwickelten, hieher gehörigen Darstellungen, wenn der Summen-Ausdruck für die Verbindungen eine Function von q ist. In dem 5ten Coëfficienten des Summen-Ausdrucks für die Verbindungen ohne Wiederholungen zur 7ten Classe ($G_5 = A_6^7$) ist in dem angeführten Werke von *Kramp* ein Druckfehler stehen geblieben. *Kramp* hat die Summen-Ausdrücke für die Verbindungen ohne Wiederholungen nur bis zur siebenten, und die für die Verbindungen mit Wiederholungen nur bis zur sechsten Classe mitgetheilt. Hier sind sie bis zur achten Classe gegeben. Man kann die Rechnung leicht fortsetzen, wird aber dabei, wie die vorstehenden Fälle zeigen, auf ganz ungewöhnlich grofse, der Unbeweglichkeit sich nähernde Zahlen geführt.

Nachtrag zu dem zweiten Abschnitte.

---

§. 49.

Zu §. 10 und 11.

In einer Urne sind n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus, betrachtet die aufgeschriebenen Zahlen und legt die Kugeln in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel mit der auf ihr stehenden Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde?

Die Zahl der günstigen Fälle stimmt, wie leicht zu sehen, mit der Anzahl der Stellen-Elemente überein, welche entstehen, wenn man die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe bildet. Bezeichnet man die Gruppen-Anzahl dieser Stellen-Elemente bei den Versetzungen mit Wiederholungen, nach Analogie der Stellen-Elemente bei den Versetzungen ohne Wiederholungen (Combinationslehre §. 43.), durch

$$St'([a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n]^p,$$

so wird ihre Gruppenzahl auf eine ähnliche Weise wie jene und zwar auf folgende Weise gefunden.

Die Zahl der Gruppen, in welchen je ein Element auf der Stelle, welches seine Stellenzahl angiebt, erscheinen kann, ist p. Vor und nach ihm können alle Elemente in jeder möglichen Mischung auf $p-1$ Stellen erscheinen. Die hiedurch bedingte Gruppenzahl ist

$$\frac{p}{1} n^{p-1}.$$

Diese Zählungsart führt jedoch zu viele Gruppen auf; denn es trifft sich, dafs auflösende Gruppen unter zwei Elementen zugleich, also *zweimal* gezählt werden, während sie nur einmal gezählt werden sollten. Es müssen daher alle Gruppen ausgeschieden werden, in welchen die Stellen-Elemente paarweise zusammentreten können. Ihre Zahl ist, da keine Versetzungen

möglich sind, $\frac{p(p-1)}{1.2}$. Vor und nach diesen Gruppen können alle Elemente, in jeder möglichen Mischung, auf $p-2$ Stellen erscheinen. Die hiedurch bedingte und auszuscheidende Gruppenzahl ist also $\frac{p(p-1)}{1.2}n^{p-2}$. Fährt man in dieser Zählungsweise durch allmäliges weiteres Ausscheiden fort, so ergiebt sich folgende Zahl günstiger Gruppen:

$$(1.)\quad St'[a_1, a_2, \ldots a_n]^p = pn^{p-1} - (p)_2 n^{p-2} + (p)_3 n^{p-3} - (p)_4 n^{p-4} + \cdots$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Diese Gruppenzahl läfst sich auch auf das Binomium zurückführen und wie folgt darstellen:

$$(2.)\quad St'[a_1, a_2, \ldots a_n]^p = n^p - [n^p - pn^{p-1} + (p)_2 n^{p-2} - (p)_3 n^{p-3} + \cdots]$$
$$= n^p - (n-1)^p = \Delta(n-1)^p.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn Nr. 1 oder 2 durch die Zahl aller möglichen Fälle n^p dividirt wird. Man erhält

$$(3.)\quad w = \frac{p}{n} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.n^4} + \cdots$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p = \frac{\Delta(n-1)^p}{n^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit wird um so gröfser, je gröfser n und p sind; denn $\left(1-\frac{1}{n}\right)^p$ nähert sich in diesem Falle der Null mehr und mehr. In Nr. 3 kann höchstens $p = n$ werden. Man kann daher fragen: wie viele Ziehungen sind nöthig, um bei einer bestimmten Zahl von Kugeln einen gewissen Grad der Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dafs wenigstens eine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde? Zu dem Ende hat man x aus der Gleichung

$$w = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^x$$

zu entwickeln. Setzt man $w = \frac{r}{s}$, so ist

$$(4.)\quad x = \frac{\log\left(1-\frac{r}{s}\right)}{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\log s - \log(s-r)}{\log n - \log(n-1)}.$$

Der Grad der Wahrscheinlichkeit x ist übrigens, wie sich leicht erkennen läfst, in bestimmte Grenzen eingeschlossen.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe unter den oben angegebenen Bedingungen zusam-

mentreffen werde, ist

$$(5.)\quad w = 1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} + \dots = \left(1-\frac{1}{n}\right)^p.$$

Zugleich ergiebt sich aus (5.) die Zahl der Gruppen bei den Versetzungen mit Wiederholungen, wo kein Element auf seiner Stelle erscheint. Sie ist

$$(6.)\quad St'[0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_n]^p$$
$$= n^p - pn^{p-1} + (p)_2 n^{p-2} - (p)_3 n^{p-3} + \dots = (n-1)^p.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen gerade r Kugeln (nicht mehr und nicht weniger) mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werden?

Die Zahl der Gruppen, in welchen gerade r Elemente zugleich an ihrer Stelle erscheinen, ist $\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{1.2.3\dots r}$. Aufser diesen dürfen auf den übrigen $(p-r)$ Stellen keine Stellen-Elemente vorkommen. Um die Zahl der günstigen Fälle zu finden, mufs in (6.) $p-r$ statt p gesetzt und der gefundene Ausdruck mit $(p)_r$ verbunden werden. Dann ist die fragliche Gruppenzahl:

$$(7.)\quad St'[r;\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n]^p = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{1.2.3\dots r}(n-1)^{p-r}$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$(8.)\quad w = \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1.2\dots rn^r}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen in der Ziehungsreihe zusammentreffen werden?

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich, wenn man aus (7.) die Zahl der Gruppen nimmt, in welchen gerade $r,\ r+1,\ r+2,\ \dots\ p$ Elemente an ihrer Stelle erscheinen. Man erhält sie, wenn in (7.) allmälig $r,\ r+1,\ r+2,\ \dots\ p$ statt r gesetzt wird. Demnach ist

$$St'[r,\ r+1,\ r+2,\ \dots\ p;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_n]^p$$
$$= (p)_r(n-1)^{p-r} = (p)_r\left[n^{p-r} - \frac{p-r}{1}n^{p-r-1} + \frac{(p-r)(p-r-1)}{1.2}n^{p-r-2} \dots\right]$$
$$+ (p)_{r+1}(n-1)^{p-r-1} = (p)_{r+1}\left[n^{p-r-1} - \frac{p-r-1}{1}n^{p-r-2} + \frac{(p-r-1)(p-r-2)}{1.2}n^{p-r-3} \dots\right]$$
$$+ (p)_{r+2}(n-1)^{p-r-2} = (p)_{r+2}\left[n^{p-r-2} - \frac{p-r-2}{1}n^{p-r-3} + \frac{(p-r-2)(p-r-3)}{1.2}n^{p-r-4} \dots\right]$$

. . . .

Ordnet man diese Darstellung nach den Potenzen von n, so ergiebt sich

$$(p)_{r+1}\left(1-\frac{r+1}{1}\right)n^{p-r-1} = -(p)_{r+1}\frac{r}{1}n^{p-r-1},$$

$$(p)_{r+2}\left(1-\frac{r+1}{1}+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\right)n^{p-r-2} = (p)_{r+2}\frac{r(r+1)}{1.2}n^{p-r-2},$$

$$(p)_{r+3}\left(1-\frac{r+1}{1}+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}-\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}\right)n^{p-r-3} = -(p)_{r+3}\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}n^{p-r-3}$$

u. s. w.

Die Zahl der günstigen Fälle läfst sich daher auch so darstellen:

$$(9.)\quad St'[r,\ r+1,\ r+2,\ \dots\ p;\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n]^p$$

$$= (p)_r n^{p-r} - (p)_{r+1}\frac{r}{1}n^{p-r-1} + (p)_{r+2}\frac{r(r+1)}{1.2}n^{p-r-2} - (p)_{r+3}\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}n^{p-r-3} + \dots$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$(10.)\quad w = \left[\frac{(p)_r}{(n-1)^r}+\frac{(p)_{r+1}}{(n-1)^{r+1}}+\frac{(p)_{r+2}}{(n-1)^{r+2}}+\dots\right]\left(1-\frac{1}{n}\right)^p$$

$$= \frac{(p)_r}{n^r}\left[1-\frac{(p-r)r}{(r+1)n}+\frac{(p-r)(p-r-1)r}{1.2(r+2)n^2}-\frac{(p-r)(p-r-1)(p-r-2)r}{1.2.3(r+3)n^3}+\dots\right]$$

$$= \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1.2\dots(r-1)n^r}\int_0^1 x^{r-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{p-r}\partial x.$$

Setzt man in (10.) $s+1$ statt r, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs höchstens s Kugeln mit den ihnen aufgeschriebenen Zahlen übereinstimmen werden,

$$(11.)\quad w = 1-\frac{(p)_{s+1}}{n^{s+1}}\left[1-\frac{(p-s-1)(s+1)}{(s+2)n}+\frac{(p-s-1)(p-s-2)(s+1)}{1.2(s+3)n^2}-\dots\right]$$

$$= 1-\frac{(p)_{s+1}}{n^{s+1}}(s+1)\int_0^1 x^s\left(1-\frac{x}{n}\right)^{p-s-1}\partial x.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r und höchstens s Kugeln (also r, $r+1$, $r+2$, ... s) mit den auf ihnen stehenden Zahlen in der Ziehungsreihe zusammentreffen werden, ergiebt sich, wenn man $s+1$ in (10.) setzt und das Resultat von (10.) abzieht. Sie ist

$$(12.)\quad w = \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1.2\dots(r-1)n^r}\int_0^1 x^{r-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)\partial x$$

$$-\frac{p(p-1)\dots(p-s)}{1.2\dots s.n^{s+1}}\int_0^1 x^s\left(1-\frac{x}{n}\right)^{p-s-1}\partial x.$$

In einer Urne befinden sich m Kugel-Arten, von welchen jede n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthält. p Kugeln werden einzeln heraus genommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt.

Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel mit der auf ihr geschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffe?

Man sieht leicht, dafs die Zahl der günstigen Fälle mit den Gruppen der Stellen-Elemente zusammenfällt, welche entstehen, wenn man die Versetzungen mit Wiederholungen zur $p$ten Classe aus m Elementenreihen aufstellt. Die Gruppenzahl läfst sich ganz auf die oben zu Nr. 1. angegebene Weise finden, wenn man erwägt, dafs die auflösenden Gruppen jeweils so viel mal mehr vorkommen werden, als die mit einerlei Stellenzahlen bezeichneten Elemente aus den verschiedenen Elementenreihen Versetzungen mit Wiederholungen zu der erforderlichen Classe (m^1, m^2, m^3, ...) geben können. Diesem zufolge ist die Zahl der Stellen-Elemente (günstige Gruppen-Anzahl)

$$(13.)\quad St'[a_1, a_2, \dots a_n;\ b_1, b_2, \dots b_n;\ c_1, c_2, \dots c_n;\ \dots\ m_1, m_2, \dots m_n]^p$$
$$= p.m(mn)^{p-1} - (p)_2 m^2 (mn)^{p-2} + (p)_3 m^3 (mn)^{p-3} - p_4 m^4 (mn)^{p-4} + \dots$$
$$= (mn)^p - (mn-m)^p = m^p[n^p - (n-1)^p] = m^p \Delta (n-1)^p.$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn durch $(mn)^p$ die Zahl aller möglichen Fälle dividirt wird:

$$(14.)\quad w = \frac{p}{n} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.n^4} + \dots$$

Bleibt man bei dem eben bezeichneten Entwicklungsgange, so lassen sich leicht die nachstehenden Fragen beantworten.

Die Bedingungen sind wie vorhin. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde?

$$(15.)\quad w = 1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} + \dots = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade r, nicht mehr und nicht weniger, mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werden, ist

$$(16.)\quad w = \frac{(p)_r m^r . m^{p-r}(n-1)^{p-r}}{(mn)^p} = \frac{(p)_r}{n^r}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r} = \frac{(p)_r}{(n-1)^r}\left(1-\frac{1}{n}\right)^p.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln auf ihrer Stelle erscheinen werden, ist

$$(17.)\quad w = \frac{1}{n^r}\left[(p)_r\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r} + (p)_{r+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r-1} + (p)_{r+2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r-2} + \dots\right]$$
$$= \frac{(p)_r}{n^r}\left[1 - \frac{(p-r)r}{(r+1)n} + \frac{(p-r)(p-r-1)r}{1.2.(r+2)n^2} - \frac{(p-r)(p-r-1)(p-r-2)r}{1.2.3.(r+3)n^3} + \dots\right]$$
$$= \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1.2\dots(r-1)n^r}\int_0^1 x^{r-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{p-r}\partial x.$$

Man sieht aus der Vergleichung von (3. und 14.), (5. und 15.), (8. und 16.), (10. und 17.), daſs die vorgelegten Fragen, obgleich von wesentlich verschiedenen Bedingungen ausgehend, doch zu einerlei Resultat führen.

An die bisher aufgestellten Gleichungen knüpft sich die Beantwortung folgender Probleme aus der Combinationslehre.

Werden die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementenreihen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n;\ b_1, b_2, b_3, \ldots b_n;\ c_1, c_2, c_3, \ldots c_n;\ \ldots m_1, m_2, \ldots m_n$ zur $p$ten Classe gebildet, so ist die Zahl der Gruppen, in welchen kein Stellen-Element erscheint,

$$(18.)\quad St'[0;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n;\ \ldots m_1, m_2, \ldots m_n]^p$$
$$= (mn)^p - pm(mn)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}m^2(mn)^{p-2} - \ldots = m^p(n-1)^p,$$

und diejenige, worin gerade r Stellen-Elemente erscheinen,

$$(19.)\quad St'[r;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n;\ \ldots m_1, m_2, \ldots m_n]^p$$
$$= \frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)}{1.2\ldots r}m^p(n-1)^{p-r};$$

ferner diejenige, worin wenigstens r Stellen-Elemente erscheinen,

$$(20.)\quad St'[r, r+1, \ldots p;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n;\ \ldots m_1, m_2, \ldots m^r]^p$$
$$= (p)_r m^p\left[n^{p-r} - (p-r)\frac{rn^{p-r-1}}{r+1} + (p-r)_2\frac{rn^{p-r-2}}{r+2} - (p-r)_3\frac{rn^{p-r-3}}{r+3} + \ldots\right].$$

In jeder von k Urnen sind n mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthalten. Man zieht allmälig alle Kugeln aus jeder Urne. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs wenigstens eine Kugel in der Ziehungsreihe mit der darauf geschriebenen Zahl zusammentreffe?

Das fragliche Ereigniſs kann entweder bei dem Ziehen der Kugeln aus der ersten Urne, oder, wenn es nicht geschieht, bei dem Ziehen aus der zweiten, dritten etc. eintreffen. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens nach (2. §. 10.) durch

$$w_1 = 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots (-1)^{n-1}\frac{1}{1.2\ldots n}$$

und die entgegengesetzte durch $w_2 = 1 - w_1$, so ergiebt sich für die fragliche Wahrscheinlichkeit:

$$(21.)\quad w = w_1 + w_2 w_1 + w_2^2 w_1 + w_2^3 w_1 + \ldots w_2^{k-1} w_1 = w_1\frac{w_2^k - 1}{w_2 - 1}$$
$$= w_1\frac{1-w_2^k}{1-w_2} = 1 - w_2^k.$$

Dies Nämliche gilt auch für den Fall, wenn in jeder Urne m Arten von Kugeln enthalten sind, welche die genannten Zahlen zur Aufschrift haben. Die Werthe von w_1 und w_2 sind dann aus (2. §. 11.) einzuführen.

Die Bedingungen sind wie vorhin. Man zieht aus jeder Urne gleichzeitig eine Kugel, ohne die gezogene Kugel in die Urne zurückzulegen, und fährt so fort, bis p Kugeln aus jeder Urne gezogen sind. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs alle, gleichzeitig in einer Ziehung erscheinenden Kugeln die nämliche Zahl haben, und dafs diese Zahl mit der Ordnungszahl in der Ziehungsreihe zusammentreffe?

Die Zahl der günstigen Fälle findet sich ganz nach der zu Nr. 1. angegebenen Schlufsweise. Das gleichzeitige Zusammentreffen von je k gleichbezeichneten Kugeln aus allen Urnen vermehrt die Zahl der günstigen Fälle nicht. Es giebt immer nur eine Art, wie Dies geschehen kann. Demnach giebt es p günstige Fälle, die sich mit den Versetzungen ohne Wiederholungen auf den übrigen Stellen verbinden können. Die hiedurch bedingte Gruppenzahl ist $p[(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)]^k$. Hievon sind nun diejenigen Gruppen auszusondern, in welchen das Zusammentreffen paarweise Statt findet. Sie sind

$$\frac{p(p-1)}{1.2}[(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-p+1)]^k$$

u. s. w. Die Fortsetzung dieser Schlüsse giebt folgende Zahl der günstigen Gruppen:

$$22.\quad St'[a_1, a_2, \ldots\ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots\ldots b_n;\ \ldots\ldots\ k_1, k_2, \ldots\ldots k_n]^{p,p,p,\ldots\ldots}$$
$$= p[(n-1)^{p-1|-1}]^k - (p)_2[(n-2)^{p-2|-1}]^k + (p)_3[(n-3)^{p-3|-1}]^k - \ldots\ldots$$

Wird $[n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)]^k$ durch die Zahl aller möglichen Fälle dividirt, so ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit, und man erhält

$$23.\quad w = \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)}{1.2[n(n-1)]^k} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3[n(n-1)(n-2)]^k} - \ldots\ldots$$

Werden alle Kugeln aus jeder Urne gezogen, so ist

$$24.\quad w = \frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{1.2[n(n-1)]^{k-1}} + \frac{1}{1.2.3[n(n-1)(n-2)]^{k-1}} - \ldots\ldots$$

Die nämliche Frage läfst sich stellen, wenn in jeder Urne mehrere gleich bezeichnete Kugel-Arten (m) vorhanden sind und p Kugeln einzeln und gleichzeitig aus jeder Urne gezogen werden, ohne dafs man die gezogene Kugel in die Urne zurücklegt. Die Zahl der günstigen Fälle wird durch die gleiche Schlufsweise, wie vorhin, gefunden; wobei jedoch zu bemerken ist,

dafs die Zahl der auflösenden Gruppen zunimmt, indem in jeder Urne m Kugel-Arten vorhanden sind, von denen jede die entsprechenden Elemente liefert. Die Zahl der günstigen Gruppen ist

$$25.\quad A = pm^k[(mn-1)^{p-1|-1}]^k - (p)_2 m^{2k}[(mn-2)^{p-2|-1}]^k + (p)_3 m^{3k}[mn-3)^{p-3|-1}]^k - \ldots.$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, durch Dividiren mit $[(mn)^{p|-1}]^k$,

$$26.\quad w = \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)m^{2k}}{1.2[mn(mn-1)]^k} + \frac{p(p-1)(p-2).m^{3k}}{1.2.3[mn(mn-1)(mn-2)]^k} - \ldots.$$

Werden unter den nämlichen Bedingungen aus k Urnen, von welchen jede n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthält, je p Kugeln einzeln und gleichzeitig gezogen, wird stets die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt, und fragt man, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs wenigstens einmal alle gleichzeitig gezogenen Kugeln die gleiche, mit der Ziehungsreihe übereinstimmende Zahl zeigen, so findet sich für die dem Ereignifs günstige Gruppenzahl:

$$\begin{aligned}27.\quad & St'[a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n;\ \ldots k_1, k_2, \ldots k_n]^{p,p,p,\ldots} \\ & = pn^{(p-1)k} - (p)_2 n^{(p-2)k} + (p)_3 n^{(p-3)k} - \ldots \\ & = n^{pk} - [n^{pk} - pn^{(p-1)k} + (p)_2 n^{(p-2)k} - \ldots] = n^{pk} - (n^k-1)^p.\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn man durch n^{pk} dividirt, und ist

$$\begin{aligned}28.\quad w & = \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^{2k}} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^{3k}} - \ldots \\ & = 1 - \frac{(n^k-1)^p}{n^{pk}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^p.\end{aligned}$$

Sind in jeder Urne m verschiedene, mit 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugelarten enthalten, wird unter den angegebenen Bedingungen je eine Kugel aus jeder Urne gezogen und Dies p mal wiederholt, so ist die Zahl der günstigen Fälle:

$$\begin{aligned}29.\quad A & = pm^k(mn)^{(p-1)k} - (p)_2 m^{2k}(mn)^{(p-2)k} + (p)_3 m^{3k}(mn)^{(p-3)k} - \ldots \\ & = (mn)^{pk} - [(mn)^{pk} - pm^k(mn)^{(p-1)k} + (p)_2 m^{2k}(mn)^{(p-2)k} \ldots] \\ & = (mn)^{pk} - m^{pk}(n^k-1)^p.\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist, nach den gehörigen Reductionen,

$$30.\quad w = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^p.$$

